TD n°5

Systèmes linéaires

1. Résolution de systèmes

Exercice 1.1 **Résolution de systèmes, * à **, I**

1. $\left\{\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x-2y+3z=0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{r} -x+3y-t=0 \\ 2x-y+2z+2t=0 \\ 5y+2z=0 \\ x+2y+2x+t=0 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{r} y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \\ x+z=1 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcl} -x+3y-t & = & 0 \\ 2x-y+2z+2t & = & 0 \\ 5y+2z & = & 0 \\ x+2y+2z+t & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 1.2 **Résolution de systèmes avec paramètres dans le second membre (a, b, c réels), **, I**

1. $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=a \\ x-y-z=b \\ -3x+y+3z=c \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-3z & = & a \\ 3x+y-5z & = & b \\ 4x+2y-z & = & c \\ x-7z & = & d \end{array}\right.$

3. ✍ $\left\{\begin{array}{rcl} -2x-3y+3z & = & a \\ x+2y-z & = & b \\ x+y-2z & = & c \end{array}\right.$

Exercice 1.3 **Systèmes avec paramètre dans les coefficients, **, I**

Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles les systèmes sont de Cramer, puis les résoudre en distinguant tous les cas.

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda x+3y & = & 1 \\ -\lambda x+(1-2\lambda)y & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{r} (1-\lambda)x-y+2z=0 \\ x-(1+\lambda)y+2z=0 \\ x-y+(2-\lambda)z=0 \end{array}\right.$

3. ✍ $\left\{\begin{array}{r} (2-\lambda)x+4z=0 \\ 3x-(4+\lambda)y+12z=0 \\ x-2y+(5-\lambda)z=0 \end{array}\right.$

Solution. Nous allons résoudre l'équation 1.
Pour éliminer l'inconnue x, on a le choix entre deux pivots 2λ et $-\lambda$.

1. $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\lambda x+(1-2\lambda)y & = & 1 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2\lambda x+3y & = & 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda x-(1-2\lambda)y & = & -1 \quad L_1 \leftarrow -L_1 \\ (5-4\lambda)y & = & 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda x-(1-2\lambda)y & = & -1 \\ (5-4\lambda)y & = & 1 \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x - (1-2\lambda)y & = & -1 \\ (5-4\lambda)y & = & 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array} \right.$$

Le système est triangulaire et les deux pivots sont λ et $5-4\lambda$.
Par ailleurs, $5-4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{5}{4}$.
D'où le système est de Cramer si et seulement si $\lambda \neq \dfrac{5}{4}$ et $\lambda \neq 0$.

□