TD n°4
Logique et raisonnement

1. Logique

Exercice 1.1 **Négation avec des implications, ***

Soient A,B et C trois assertions. Donner la négation des assertions suivantes :

1. (A et B) $\Rightarrow$ (C)
2. A $\Rightarrow$ non(B)
3. A $\Rightarrow$ B
4. non (A ou B) $\Rightarrow$ C
5. (A et B) $\Rightarrow$ non(C)

Exercice 1.2 **Négation d'une implication, ***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la négation des assertions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (2 \text{ divise } n)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \Rightarrow (n \text{ divise } 2)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$

Exercice 1.3 **Condition nécessaire et suffisante, ***

Compléter avec "faut" ou "suffit" :

1. Pour avoir le bac, il......avoir la moyenne.
2. Pour qu'un entier soit pair, il......que cet entier soit un multiple de 6.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour que $n < 10$, il......que $n < 13$.
4. Soit a, b et c trois réels tels que $a < c$. Pour que $b < c$, il.....que $b \leq a$.

Exercice 1.4 **CN et CS, ****

1. Donner une condition nécessaire mais non suffisante sur x pour que $x^2 \geq 1$.
2. Donner une condition suffisante mais non nécessaire sur x pour que $x^2 \geq 1$.

Exercice 1.5 **CN, CS et réciproque, contraposée, ***

Traduitre les propositions en langage mathématiques.
Dire si ces propositions, ainsi que leurs réciproques, sont vraies.
Donner leur négation et leur contraposée.

1. Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels soient positifs.
2. Il est nécessaire que $x > 0$ pour que $2x + 3 > 0$.
3. Pour que $x = 2$, il faut que $x^2 = 4$.

Exercice 1.6

Donner la négation, réciproque et contraposée des propositions suivantes et dire pour chacune d'entre elles si elles sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0,\ x^2 \leq y \Rightarrow x \leq y$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0,\ x^2 \leq y \Rightarrow x \leq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad (x = 0 \text{ ou } \ y = 0) \Rightarrow xy = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad \mid x \mid = \mid y \mid \Rightarrow x = y$
5. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$
6. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$

2. Différents types de raisonnements

Exercice 2.7 **Différents types de raisonnement**

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.
2. Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{x}}.$$

   Montrer que f n'est ni paire, ni impaire.

3. Soit $n \geq 2$. Montrer que : $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Montrer que :

$$(\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon) \Rightarrow (a = 0)$$

   (indication : contraposée).

5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, b < x \Rightarrow a < x) \Rightarrow (a \leqslant b).$$

   (indication : contraposée)

Solution.

1. Raisonnement direct
2. Contre exemple
3. Raisonnement direct
4. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Montrons par contraposition que : $a \neq 0 \Rightarrow \exists \epsilon \in \mathbb{R}, |a| \geqslant \epsilon$.
   Supposons $a \neq 0$ et montrons que $\exists \epsilon \in \mathbb{R}, |a| \geqslant \epsilon$.
   Pour cela posons $\epsilon = \frac{|a|}{2}$.
   Comme $a \neq 0$, alors $\frac{|a|}{2} > 0$ et $\frac{|a|}{2} \leqslant |a|$.
   Ainsi, $\varepsilon > 0$ et $|a| \geqslant \epsilon$.
   Alors, on a trouvé $\epsilon > 0$, tel que : $|a| \geqslant \epsilon$.
   On en conclut que la contraposée est vraie et donc que la proposition initiale est vraie aussi

suivant le principe suivant :
$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow non(Q) \Rightarrow non(P)$.
Ainsi, $\boxed{(\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon) \Rightarrow (a = 0)}$

5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrons par contraposition que : $(a > b) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, b < x \Rightarrow a \geq x)$.
Supposons que $a > b$ et montrons qu'il existe un nombre réel x tel que :
$$b < x \text{ et } a \geqslant x$$
c'est à dire tel que $b < x \leqslant a$.
Posons $x = \dfrac{a+b}{2}$ (c'est à dire le milieu de a et b), alors ce réel convient.
Ainsi, on a trouvé un réel x tel que $b < x$ et $a \geqslant x$.
On en conclut que la contraposée est vrai et donc que la proposition initiale est vraie aussi suivant le principe suivant :
$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow non(Q) \Rightarrow non(P)$..
Ainsi, $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}, b < x \Rightarrow a < x) \Rightarrow (a \leqslant b).}$

$\square$

Exercice 2.8 **Récurrence,***

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad n\ln(x) = \ln(x^n)$.

Exercice 2.9 **Récurrence, *, I**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: $n! \geq 2^n$ (où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n$). Montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à partir d'un certain rang que vous préciserez.

Exercice 2.10 **Récurrence, ****

Démontrer que $2^n + 1 \geq n^2$ pour $n \geq 3$ entier.

Exercice 2.11 **Récurrence, ****

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$: $2^n \geq (n+1)^2$.

1. Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, on a $2(n+1)^2 \geq (n+2)^2$.
2. Quel est le premier entier $n_0 \geq 2$ pour lequel $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ?
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2.12 **Suites récurrentes, ***

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}. \end{cases}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Exercice 2.13 **Suites récurrentes, ***

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_0 \leqslant 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{2+u_n}. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 2.14 **Récurrence double, *, I**

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier n : $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.