Corrigé TD n°10

Probabilités sur un univers fini

1. Evènements

Exercice 1.1 ***, I**

Une épreuve aléatoire consiste à effectuer des lancers successifs d'un dé.
Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, A_k désigne l'évènement : " le $k$ième lancer a fourni un 6."
Exprimer les évènements suivants à l'aide des A_k et des opérations autorisées sur les évènements.
E_2 : " Le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer."
E_5 : " Le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer."
E_n : " Le premier 6 a été obtenu au $n$ième lancer ", $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
G_4 : " Le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer."

Exercice 1.2 ***, I**

On lance 4 fois une pièce et on introduit les évènements P_i (resp. F_i) "le i^e lancer a donnée pile (resp. face)" pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$. Exprimer en fonction de ces évènements élémentaires, les évènements suivants :

1. A : n'obtenir que des piles
2. B : obtenir 3 piles 1 face
3. C : obtenir exactement un pile
4. D : obtenir au plus un pile
5. E : obtenir le 1er pile au 3e lancer
6. F : obtenir deux piles consécutifs
7. G : obtenir au moins un face

2. Equiprobabilité

Exercice 2.3 **Urne et boules, ***

Une urne contient $2n$ boules distinctes numérotées de 1 à $2n, n \geqslant 1$. On extrait au hasard une boule de l'urne.

1. Quelle est la probabilité que le numéro soit inférieur ou égal à n ?
2. Quelle est la probabilité que le numéro obtenu soit pair ?
3. Reprendre les questions précédentes avec une urne contenant $(2n+1)$ boules numérotées de 0 à $2n$.

Exercice 2.4 **Cartes, ****

On tire 3 cartes une à une et au hasard avec remise à chaque fois de la carte tirée, dans un jeu de 32 cartes (8 hauteurs et 4 couleurs).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 valets ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une de ces cartes soient un valet ?

3. Un peu de dénombrement

Lorsqu'on modélise une expérience aléatoire par un modèle équiprobabilité, le calcul de la probabilité d'un événement A se résume à celui du nombre d'issues constituant A.
Le problème de calcul de probabilité est donc dans ce cas un problème de ***dénombrement***.

Rappel : Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble à n éléments. Il existe $\binom{n}{p}$ parties de E à p éléments. Autrement dit, $\binom{n}{p}$ représente le nombre de façons de choisir p éléments parmi n.

Exercice 3.5 **Premier exemple :**

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules blanches. On tire simultanément 3 boules.

1. Donner le nombre de tirages possibles.
2. Combien de tirages contiennent uniquement des boules noires ?
3. Combien de tirages contiennent uniquement des boules blanches ?
4. Combien de tirages contiennent exactement deux noires ?

Exercice 3.6

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On choisit cinq cartes dans ce jeu (on parle d'« une main »).

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 rois dans cette main ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 as dans cette main ?

Exercice 3.7 **Urne et boules numérotées**

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. L'une des 10 boules est verte. Les autres sont noires.

1. Quel est le nombre de tirages possibles, si on tire successivement et sans remise deux boules de l'urne ? trois ? dix ?
2. On effectue trois tirages sans remise.
   Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit la boule verte ?
   Quelle est la probabilité que l'une des trois boule soit la boule verte ?
3. On tire finalement 3 boules simultanément dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir tiré la boule verte ?

4. Probabilités conditionnelles

Exercice 4.8 **Urne et boules sans remise 1, ***

1. On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 4 boules vertes. On extrait 3 boules. Quelle est la probabilité que l'on obtienne exactement 2 boules

vertes ?

2. On effectue 3 tirages sans remise dans une urne contenant 6 boules numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité pour que la troisième boule tirée soit la numéro 2 ?

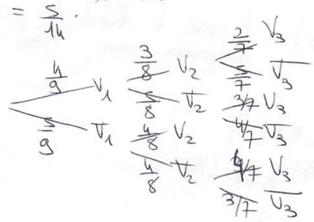
1) 

On note A l'évènement : " obtenir exactement 2 boules vertes "
Pour tout $k \in \{1,2,3\}$, on note V_k l'évènement " obtenir une boule verte au $k^{ième}$ tirage ".

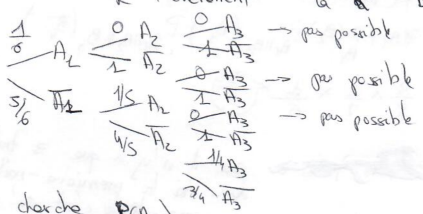
On a $A = (V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3}) \cup (V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3) \cup (\overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3)$

Par incompatibilité des évènements, il vient

$$P(A) = P(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3}) + P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3) + P(\overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3)$$
$$= P(V_1) P_{V_1}(V_2) P_{V_1 \cap V_2}(\overline{V_3}) + P(V_1) P_{V_1}(\overline{V_2}) P_{V_1 \cap \overline{V_2}}(V_3) + P(\overline{V_1}) P_{\overline{V_1}}(V_2) P_{\overline{V_1} \cap V_2}(V_3)$$
$$= \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7}$$
$$= \cancel{3} \times \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}}{\cancel{9} \times 8 \times 7}$$
$$= \frac{5}{14}.$$



2) Pour tout $k \in \{1,2,3\}$ on note A_k l'évènement " la $k^{ième}$ boule tirée est la n°2 "



car une seule boule n°2 donc si on la tire au 1er ou 2ème tirage on ne peut pas la tirer au 3ème

On cherche $P(A_3)$

mais $A_3 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$ car comme il n'y a qu'une seule boule n°2 pour la tirer au 3ème tirage il ne faut pas l'avoir tirée avant.

D'où $P(A_3) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$

$$= P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3)$$ d'après la formule des probas

$$= \frac{\cancel{5}}{6} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{1}{\cancel{4}}$$
$$= \frac{1}{6}$$

Exercice 4.9 **Urne et boules sans remise 2, *, I**

On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules noires et 3 blanches. Pour tout $k \in [\![1,8]\!]$, on introduit les évènements E_k "la première boule noire est obtenue au k^{ie} tirage", et B_k "le k^{ie} tirage donne une blanche".

1. Décrire les évènements E_1, ..,E_4 à l'aide des autres évènements.
2. En déduire les probabilités des évènements E_1, ... E_4. Que valent $P(E_k)$ pour $k \geq 5$?

1) $E_1 = \overline{B_1}$ $\quad E_3 = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$

$E_2 = B_1 \cap \overline{B_2}$ $\quad E_4 = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}$

2) $P(E_1) = P(\overline{B_1}) = \frac{5}{8}$ car on est en situation d'équiprobabilité et il y a 5 bales noires et 8 bales au total)

$P(E_2) = P(B_1 \cap \overline{B_2})$

$= P(B_1) P_{B_1}(\overline{B_2})$ d'après la formule des probas composées avec $P(B_1) \neq 0$

$= \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$

$P(E_3) = P(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3})$

$= P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(\overline{B_3})$

$= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6}$

$P(E_4) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4})$

$= P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(B_3) P_{B_1 \cap B_2 \cap B_3}(\overline{B_4})$

$= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} \times \underbrace{\frac{5}{5}}_{=1}$

Pour $k \geq 5$ $P(E_k) = 0$ car il n'y a que 3 bales blanches donc si la première noire apparait au rang ~~k~~ ≥ 5 c'est qu'avant il faut avoir tirer $k-1$ bales blanches. donc au moins 4 blanches. or il n'y en a que 3 blanches dans l'urne.

Exercice 4.10 **Pièces défectueuses, *, I**

Une usine fabrique 5% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées à la sortie de façon aléatoire. Si une pièce est bonne, elle est refusée avec une probabilité de 4% et 98% des pièces défectueuses sont refusées. On choisit au hasard une pièce que l'on contrôle.
Calculer la probabilité que :

1. Il y a une erreur dans le contrôle.
2. La pièce testée soit bonne sachant qu'elle est refusée.
3. La pièce soit mauvaise sachant qu'elle est refusée.

Notons D l'événement "la pièce est défectueuse"
$P(D) = 0{,}05$ d'après l'énoncé
Notons R l'événement "la pièce est refusée"
D'après l'énoncé on a $P_{\bar{D}}(R) = 0{,}04$
$P_D(R) = 0{,}98$

$0{,}05$ D — $0{,}98$ R ; $0{,}02$ $\bar{R}$
$0{,}95$ $\bar{D}$ — $0{,}04$ R ; $0{,}96$ $\bar{R}$

1) On cherche $P\left((D \cap \bar{R}) \cup (\bar{D} \cap R)\right)$
c'est à dire la probabilité que la pièce soit défectueuse et acceptée ou qu'elle soit bonne et refusée.

On a par incompatibilités des événements :
$$P((D\cap\bar{R}) \cup (\bar{D}\cap R)) = P(D\cap\bar{R}) + P(\bar{D}\cap R)$$
$$= P(D)P_D(\bar{R}) + P(\bar{D})P_{\bar{D}}(R)$$
d'après la formule des probas composées avec $P(D) \neq 0$ et $P(\bar{D}) \neq 0$
$$= 0{,}05 \times 0{,}02 + 0{,}95 \times 0{,}04$$
$$= 0{,}039$$

2) On cherche $P_R(\bar{D})$
D'après la formule de Bayes, comme $P(R) \neq 0$ et $P(\bar{D}) \neq 0$, on a :
$$P_R(\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}\cap R)}{P(R)} = \frac{P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(R)}{P(R)}$$
avec $P(\bar{D}) = 0{,}95$ et $P_{\bar{D}}(R) = 0{,}04$

De plus, $\{D, \bar{D}\}$ forment un sce de probas toutes non nulles, d'où d'après la f. probas totales appliquées à ce s.c.e on a
$$P(R) = P(D\cap R) + P(\bar{D}\cap R)$$
$$= P(D)P_D(R) + P(\bar{D})P_{\bar{D}}(R)$$
$$= 0{,}05 \times 0{,}98 + 0{,}95 \times 0{,}04$$
$$= \ldots$$

D'où $P_R(\bar{D}) = \dfrac{0{,}95 \times 0{,}04}{0{,}05 \times 0{,}98 + 0{,}95 \times 0{,}04}$

3) On cherche $P_R(D)$
On a $P_R(D) = 1 - \underbrace{P_R(\bar{D})}_{\text{calculé à la q. 2}}$

Exercice 4.11 **Jeu de cartes, ***

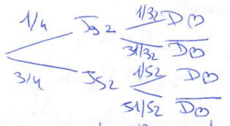
On dispose d'un jeu de 32 cartes et de 3 jeux de 52 cartes. On tire au sort l'un des jeux puis on tire une carte dans ce jeu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la dame de coeur ?
2. Si on obtient la dame de coeur, quelle est la probabilité d'avoir choisi le jeu de 32 cartes ?

on note J_{32} l'évn " on tire le jeu de 32 cartes "

J_{52} ——— 52

$D_\heartsuit$ ——— " on tire la dame de coeur "



1) $\{J_{32}, J_{52}\}$ forment un sce de probas toutes non nulles

D'où d'après la f.p. totales appliquée à ce sce, on a :

$$P(D_\heartsuit) = P(J_{32} \cap D_\heartsuit) + P(J_{52} \cap D_\heartsuit)$$
$$= P(J_{32}) P_{J_{32}}(D_\heartsuit) + P(J_{52}) P_{J_{52}}(D_\heartsuit)$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{32} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{52}$$

2) on cherche $P_{D_\heartsuit}(J_{32})$

on a $P(D_\heartsuit) \neq 0$ et $P(J_{32}) \neq 0$

D'où d'après la formule de Baye on a

$$P_{D_\heartsuit}(J_{32}) = \frac{P(J_{32} \cap D_\heartsuit)}{P(D_\heartsuit)} = \frac{P(J_{32}) P_{J_{32}}(D_\heartsuit)}{P(D_\heartsuit)}$$
$$= \frac{1/4 \times 1/32}{P(D_\heartsuit)} \to \text{cf calcul q.1.}$$

Exercice 4.12 Urnes et tirages, **

On dispose de n urnes ($n \geq 1$), numérotées de 1 à n, et telles que, pour tout k élément de $[\{1; ..; n\}]$, l'urne numérotée k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires.

1. On choisit une urne au hasard, on en extrait une boule.
   Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?
2. On choisit une urne au hasard, on en extrait une boule et on constate qu'elle est blanche.
   Quelle est la probabilité que cette boule provienne d'une urne numérotée 1 ?

Exercice 4.13 Urne et tirage avec modification de la remise, **, I

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages dans cette urne de la façon suivante : si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec deux autres boules blanches et si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne avec une autre boule noire. On note B_i l'évènement : " la $i$ème boule tirée est blanche ".

1. Calculer $P(B_1), P(B_2), P(B_3)$.
2. Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?
3. Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit blanche ?

5. Indépendance

Exercice 5.14 Urne et boules avec remise, *

On extrait avec remise à chaque fois de la boule tirée, n boules d'une urne contenant une boule noire et une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des boules tirées soit blanche ?

Solution. Notons A l'évènement "au moins une des boules tirées est blanche".
Notons N_k l'évènement "obtenir un boule noire au k ème tirae" et B_k l'évènement "obtenir un

boule blanche au k ème tirae", pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On considère plutôt $\overline{A}$ l'èvenement "obtenir aucune boule blanche".
On a $\overline{A} = N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_k$.
D'où, $P(\overline{A}) = P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_k)$.
Les lancers étant mutuellement **indépendants**, on en déduit que

$$P(A) = P(N_1) \times ... \times P(N_k) = \frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

D'où $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{2^n}$. □

Exercice 5.15 **Pièce truquée, ****

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0;1[$).
L'évènement "pile" (resp. "face") sera noté P (resp. F).
Soit A_n l'évènement "la séquence PF apparait pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n".
Calculer $P(A_n)$ lorsque (a) $n = 3$ (b) $n = 4$ (c) $n = 5$ (d) n quelconque.

Exercice 5.16 **Urnes, boules et indépendance, **, I**

Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche simultanément 4 boules.
On pose E : "obtenir exactement 2 blanches " et F : "obtenir exactement 2 rouges"

1. On suppose que l'on tire simultanément les 4 boules.
   Calculer les probabilités suivantes : $P(E \cap F)$, $P_F(E)$, $P_E(F)$. Les évènements E et F sont-ils indépendants ?
2. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche successivement avec remise.

Solution. 1. On suppose qu'il n'y a pas remise. On peut donc assimiler ce tirage à un tirage simultané.
Le nombre total de tirages possibles est donc $\binom{13}{4} = \dfrac{13!}{4!9!} = \dfrac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2} = 13 \times 11 \times 5 = 715$
On a alors :
$P(E \cap F) = P(\{BBRR\}) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{18}{715}$
De plus, par un raisonnement similaire $P(F) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{9}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{216}{715}$ (les deux boules restantes sont à tirer parmi les 9 boules non rouges).
Et $P(E) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{10}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{135}{715} = \dfrac{27}{143}$.
La formule des probabilités conditionnelles et les calculs précédents donnent donc :
$P_F(E) = \dfrac{\frac{18}{715}}{\frac{216}{715}} = \dfrac{1}{12}$.
Et $P_E(F) = \dfrac{\frac{18}{715}}{\frac{135}{715}} = \dfrac{2}{15}$
Enfin $P(E)P(F) = \dfrac{27}{143}\dfrac{216}{715} \neq \dfrac{18}{715} = P(E \cap F)$ donc les événements E et F ne sont pas indépendants.

2. Refaire pareil mais en utilisant l'indépendance des tirages.

□

Exercice 5.17 **Joyeux anniversaire, ****

On considère un groupe de p personnes, avec $1 \leq p \leq 365$. On suppose que toutes les années contiennent 365 jours et que toutes les dates d'anniversaire sont équiprobables et qu'il y a indépendance dans la naissance de ces personnes. On fera les applications numériques avec $p = 44$.

1. Déterminer la proba pour qu'une personne au moins soit née le même jour que vous.
2. Déterminer la proba pour qu'au moins deux personnes du groupe soient nées le même jour.

Solution.

1. Soit A cet événement. On raisonne sur l'événement contraire qui est : « personne n'est né le même jour que vous ».
   Par indépendance, cette probabilité vaut $\left(\dfrac{364}{365}\right)^p$ donc la probabilité cherchée vaut :
   $P(A) = 1 - \left(\dfrac{364}{365}\right)^p$.
2. Soit B cet événement. On raisonne sur l'événement contraire qui est : « toutes les personnes sont nées des jours distincts ».
   $P(\overline{B}) = 1 \times \dfrac{364}{365} \times \dfrac{363}{365} \cdots \times \dfrac{365-p+1}{365}$ (essayer de trouver le raisonnement via la formule, sachant qu'on raisonne de manière successive...).
   D'où $P(B) = 1 - \dfrac{364}{365} \times \dfrac{363}{365} \cdots \times \dfrac{365-p+1}{365}$.
   Remarque : ce calcul montre qu'à partir de 23 personnes, cette probabilité est supérieure à 0,5, ce qui choque un peu l'intuition. A partir d'un groupe de 57 personnes, la probabilité est supérieure à 99 %.

□

6. Probabilités et suites

Exercice 6.18 **Panne d'un appareil, ** , I**

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

1. s'il fonctionne au temps $n-1$, il a la probabilité $a \in]0,1[$ d'être en panne au temps n.
2. s'il est en panne au temps $n-1$, il a la probabilité $b \in]0,1[$ d'être en panne au temps n.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre p_n et p_{n-1} et en déduire p_n en fonction de $p_0 = 1$.
2. Etudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.19 **Urnes et tirages, **, I**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 : U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires et U_2 contient une boule blanche et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise d'une boule selon le protocole suivant :

— le premier tirage se fait dans l'urne U_1
— si le n^{ie} tirage a donné une boule blanche (resp. noire), le $n+1^e$ tirage s'effectue dans l'urne U_1 (resp. U_2).

On introduit les événements B_n (resp N_n) "le n^e tirage donne une boule blanche (resp. noire) " et on note $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 puis p_2.
2. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}$.
4. En déduire p_n en fonction de n ; puis déterminer sa limite quand $n \to +\infty$.

Solution.

1. Les issues du premier tirage (dans l'urne U_1) sont équiprobables, donc comme il y a deux boules blanches parmi les 4 boules de l'urne, $p_1 = P(B_1) = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
   Pour connaître l'issue du second tirage, il nous faut savoir dans quelle urne on tire, autrement dit, il faut connaitre la couleur de la première boule tirée. On utilise donc la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e. (B_1, N_1) :
   $$P(B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(N_1)P_{N_1}(B_2).$$
   Or $P(B_1) = \frac{1}{2}$, donc $P(N_1) = 1 - P(B_1) = \frac{1}{2}$. Puis sachant B_1, le second tirage s'effectue dans l'urne 1 qui contient toujours 4 boules dont 2 blanches. Comme chaque boule a même probabilité d'être tirée , $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$. De même sachant N_1, le second tirage s'effectue dans l'urne U_2 qui contient 1 blanche parmi les 4 boules. Donc $P_{N_1}(B_2) = \frac{1}{4}$.
   Finalement, $P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{8}}$.
2. Les événements $\boxed{B_1 \text{ et } B_2 \text{ ne vont pas être indépendants}}$, car si B_1 est réalisé, le second tirage se fait dans l'urne U_1 où il y a plus de boules blanches que dans l'urne U_2. Ce que l'on montre par : $P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq P(B_2) = \frac{3}{8}$
   (ou montrer que $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \neq P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$).
3. Pour avoir des informations sur le $n + 1^e$ tirage, il nous faut connaître l'urne où l'on va effectuer ce tirage donc l'issue du n^e tirage. On applique donc la formule des probabilités totales au s.c.e. (B_n, N_n) tous de probas non nulles :
   $$P(B_{n+1}) = P(B_n \cap B_{n+1}) + P(N_n \cap B_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(N_n)P_{N_n}(B_{n+1})$$
   soit encore
   $$p_{n+1} = p_n P_{B_n}(B_{n+1}) + (1 - p_n)P_{N_n}(B_{n+1})$$
   car $P(N_n) = 1 - P(B_n) = 1 - p_n$.
   Puis, sachant B_n, le $n + 1^e$ tirage s'effectue dans l'urne U_1 où il y a deux boules blanches parmi 4.
   Donc $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
   Et sachant N_n, le $n + 1^e$ tirage s'effectue dans l'urne U_2 où il n'y a qu'une boule blanche d'où $P_{N_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
   Finalement, $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}(1 - p_n) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}}$.
4. On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
   Soit α tel que $\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}$ alors $\frac{3}{4}\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$.
   On en déduit que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = p_n - \frac{1}{3}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
   D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{v_n = \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{n-1}}$.
   D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{n-1} + \frac{1}{3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{3}}$, car $-1 < \frac{1}{4} < 1$.

□