27 avril 2024

Devoir surveillé n°5

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Problème 1

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.
4. Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$.
   Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$ au centième près.
5. Montrer que : $\forall x \geqslant 0, |f'(x)| \leqslant f(x)$. En déduire que : $\forall x \geqslant 0, |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
6. Vérifier que $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Étude d'une suite

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \quad \text{puis que} \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

3. En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Simulation informatique

1. Écrire une fonction Python, notée f, permettant de définir la fonction f ci-dessus.
2. Compléter le programme suivant afin qu'il calcule une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

```
def dicho(x,y,eps):
    a=...
    b=...
    while(....):
        m=....
        if (f(a)-a)*(f(m)-m) < 0:
            b=....
        else:
            a=...
    return [a,b]
```

3. En utilisant la fonction f précédente, écrire une fonction Suite qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n.
4. En utilisant la fonction Suite précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de Python une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

Solution. **Etude d'une fonction**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ et
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$
$\boxed{\text{D'où } f \text{ est paire sur } \mathbb{R}.}$
2. On a :
   - $x \mapsto \mathrm{e}^x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
   - $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}+1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   D'où a fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)-\mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^{2x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} \end{aligned}$$
   Comme $\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{3x}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On a $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{3x} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{3x} \Leftrightarrow x > 3x \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow 0 > x$.
   D'où, $\forall x > 0,\ f'(x) < 0$ et $\forall x < 0,\ f'(x) > 0$.
   $\boxed{\text{D'où } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$
   On a en plus $f(0) = \frac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
3. Notons $g : x \mapsto f(x) - x$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0,\ g'(x) = f'(x) - 1$.
   Or $\forall x \geq 0,\ f'(x) \leqslant 0$.
   Donc $\forall x \geq 0,\ g'(x) = f'(x) - 1 < -1 < 0$ et la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
D'après le théorème de la bijection, g réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$sur
$g\left(\mathbb{R}^+\right) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$.
En effet $g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2}$ et
$g(x) = f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$,
car $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \dfrac{1}{e^x} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^{2x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par somme, inverse, quotient et produit.
Or $0 \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$.
Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{Donc l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \ell \in \mathbb{R}^+.}$

4. On a :
   - $g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2} \geqslant 0$,
   - $g(\ell) = f(\ell) - \ell = 0$,
   - $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^1+1} - \frac{1}{2} = \frac{2e^{\frac{1}{2}}-e-1}{2(e+1)} \leqslant 0$.

   En effet : $2e^{\frac{1}{2}} - e - 1 \simeq 2 \times 1,65 - 2,72 - 1 = 3,3 - 3,72 = -0,42 \leqslant 0$
   On obtient donc : $g(0) \geqslant g(\ell) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$.
   Ces trois éléments sont dans l'ensemble $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$.
   En appliquant $g^{-1} : \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^+$ qui est strictement décroissante de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :
   $$\boxed{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}.}$$

5. Soit $x \geqslant 0$.
   D'après la question 1.b. $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{3x}}{1+e^{2x}} \leqslant 0$.
   Donc $|f'(x)| = -f'(x) = \dfrac{e^{3x} - e^x}{1+e^{2x}}$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= \frac{e^{3x}-e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} - \frac{e^x}{e^{2x}+1} \\ &= \frac{e^{3x}-e^x-e^x\times\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{e^{3x}-e^x-e^{3x}-e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \leqslant 0 \end{aligned}$$
   Ainsi : $\forall x \geqslant 0, |f'(x)| \leqslant f(x)$.
   Or, l'étude de la fonction f démontre qu'elle atteint son maximum en 0 .

   $\boxed{\text{D'où } \forall x \geqslant 0, |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant f(0) = \tfrac{1}{2}.}$

6. La fonction f est continue et décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   D'où
   $$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)\right] = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e+1}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

   $\boxed{\text{D'où l'intervalle } \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \text{ est stable par } f.}$

Étude d'une suite

1. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   Initialisation :
   $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   Supposons $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$.
   Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ c'est à dire que $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Or, par HR, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f.
   D'où $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion :
   $\boxed{\text{Par le principe de récurrence , on en déduit que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right].}$

2. D'après les questions précédentes :
   - f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
   - $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

   On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :
   $$\forall (x,y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|y-x|$$
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $x = \ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on obtient :
   $$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$
   $\boxed{\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2}|u_n - \ell|.}$
   Démontrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
   On pose $\mathcal{P}(n) : |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
   Initialisation :
   $|u_0 - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$ car u_0 et ℓ sont des éléments de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   Supposons $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
   Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$.
   D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
   Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
   En combinant ces deux résultats, on obtient : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$.
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion
   $\boxed{\text{le principe de récurrence on en déduit que } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2^{n+1}}.}$

3. On a :
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
   - $\frac{1}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\text{Donc la suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell}$.

Simulation informatique

1.
```
def f(x):
    y=np.exp(x)/(np.exp(2x)+1)
    return y
```
2.
```
a=0
b=1/2
while(b-a>10**(-6)):
    m=(a+b)/2
    if (f(a)-a)*(f(m)-m) < 0:
        b=m
    else:
        a=m
print([a,b])
```
3.
```
def Suite(n):
    u=0
    for i in range(n):
        u=f(u)
    return(u)
```
4. D'après la question 2.b., pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6}$, on obtiendra par transitivité : $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-6}$. Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow 2^{n+1} \geqslant 10^6 \Leftrightarrow (n+1)\ln(2) \geqslant 6\ln(10) \\ \Leftrightarrow n+1 \geqslant \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} \\ \Leftrightarrow n \geqslant \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} - 1\end{aligned}$$

Pour $N = \left\lceil \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} - 1 \right\rceil + 1$, on est donc assuré que $|u_N - \ell| \leqslant 10^{-6}$ ce qui signifie que u_N est une approximation de ℓ à 10^{-6} près.
Il suffit alors d'appeler la fonction Suite avec pour paramètre N.
```
N=np.floor (6*np.log(10)/np.log(2)-1)+1
u=Suite(N)
```

□

Problème 2

Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-n/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cas général

1. Montrer que f_n est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.
2. Écrire un programme Python permettant de définir la fonction f_n.
3. Étudier les variations de f_n, ainsi que sa limite en $+\infty$. dresser son tableau de variations.
4. Justifier que f_n est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer $f_n''(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

5. Justifier que f_n' est dérivable en 0 et préciser $f_n''(0)$.
6. Tracer dans un même repère l'allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des fonctions f_1 et f_2.
7. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$, et u_n est solution de l'équation $x \ln x = n$.
   (c) Étudier la fonction g définie par $g(x) = x \ln x$. En déduire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
   (d) Montrer que $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$.

Cas particulier

Dans cette question, on ne s'intéresse plus qu'à la fonction f_1 définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_1(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On définit par ailleurs une suite (v_n) par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f_1(v_n)$.

1. Déterminer le signe de $f_1(x) - x$ sur $[0, +\infty[$ et les éventuelles solutions dans $[0, +\infty[$ de l'équation $f_1(x) = x$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, 1]$.
3. Étudier la monotonie de la suite (v_n).
4. En déduire que (v_n) converge et préciser sa limite.
5. Écrire une fonction Python qui prend un entier n et qui calcule v_n.

Solution. **Cas général**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
   De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{n}{x} = -\infty$.
   Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-n/x} = 0 = f_n(0)$.
   D'où f_n est continue en 0.
   On en déduit que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
   La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
   Afin de déterminer si f_n est dérivable en 0 , on étudie son taux d'accroissement en ce point :

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{x\mathrm{e}^{-n/x}}{x} = \mathrm{e}^{-n/x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

   Le taux d'accroissement de f_n en 0 admet une limite finie, d'où f_n est dérivable en 0.
   Donc f_n est d dérivable sur $[0, +\infty[$.
   $\boxed{\text{Ainsi } f_n \text{ est définie et dérivable sur } [0, +\infty[.}$
2.
```
def f_n(x):
    if x>0:
        y=x*np.exp(-n/x)
    else:
        y=0
    return y
```

3. Comme nous l'avons vu à la question 1, f_n est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, $f_n'(0) = 0$ et
   $\forall x > 0,\ f_n'(x) = \mathrm{e}^{-n/x} + x\frac{n}{x^2}\mathrm{e}^{-n/x} = \left(1 + \frac{n}{x}\right)\mathrm{e}^{-n/x} > 0$.
   avec $f_n'(0) = 0$.

$\boxed{\text{D'où } f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-n/x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

D'où par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-n/x} = +\infty$.

4. La fonction f_n est C^2 sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions C^2 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0,\ f_n''(x) = -\frac{n}{x^2}\mathrm{e}^{-n/x} + \left(1 + \frac{n}{x}\right)\frac{n}{x^2}\mathrm{e}^{-n/x} = \frac{n^2}{x^3}\mathrm{e}^{-n/x}$.

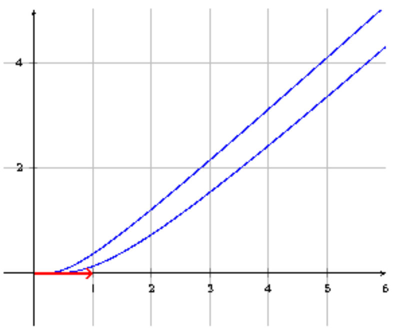
5. Afin de déterminer si f_n' est dérivable en 0 , on étudie son taux d'accroissement en ce point.

$$\frac{f_n'(x) - f_n'(0)}{x - 0} = \frac{\left(1 + \frac{n}{x}\right)\mathrm{e}^{-n/x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-n/x}}{x} + n\frac{\mathrm{e}^{-n/x}}{x^2} \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

En effet, en procédant comme précédemment, on obtient $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-n/x}}{x^2} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nX}}{\frac{1}{X^2}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X^2}{\mathrm{e}^{nX}} = 0$(par croissances comparées).

$\boxed{\text{Ainsi } f_n' \text{ est dérivable en 0 et } f_n''(x) = 0.}$

6. Voici les représentations graphiques



7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty\,[$ sur $f_n([0, +\infty[)$.
Or $f_n\left([0, +\infty[\right) = [f_n(0), \lim_{x \to +\infty} f_n(x)[= [0, +\infty[$.
Comme $1 \in [0, +\infty\,[$, on en déduit que 1 admet un unique antécédent $u_n \in [0, +\infty[$ par la fonction f_n.
$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un unique réel } u_n \text{ tel que } f_n\left(u_n\right) = 1.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a$f_n\left(u_n\right) = 1$ par définition et $f_n(1) = 1\mathrm{e}^{-n/1} = \mathrm{e}^{-n} < \mathrm{e}^0 = 1$.
Ainsi $f_n\left(u_n\right) > f_n(1)$.
Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f_n^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est strictement croissante.
En appliquant f_n^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on obtient $\boxed{u_n > 1}$.
Par ailleurs,
$f_n\left(u_n\right) = 1 \Leftrightarrow u_n\mathrm{e}^{-n/u_n} = 1 \Leftrightarrow u_n = \mathrm{e}^{n/u_n} \Leftrightarrow \ln\left(u_n\right) = \frac{n}{u_n} \Leftrightarrow u_n \ln\left(u_n\right) = n$.
$\boxed{\text{Donc } u_n \text{ est solution de l'équation } x \ln x = n.}$

(c) g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et
$\forall x > 0,\ g'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = 1 + \ln(x)$.

Or $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$.
D'où g est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.
La fonction g est continue sur $\left[\mathrm{e}^{-1}, +\infty\right[$ et strictement croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1}, +\infty\right[$.
Elle réalise donc une bijection de $\left[\mathrm{e}^{-1}, +\infty\right[$ sur $g\left(\left[\mathrm{e}^{-1}, +\infty\right[\right)$.
Or $g([\mathrm{e}^{-1}, +\infty[) = \left[g\left(\mathrm{e}^{-1}\right), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[= \left[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty\right[$
On note alors g^{-1} la bijection réciproque de $g_{|[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[}$.
D'après le théorème de la bijection, g^{-1} est strictement croissante à valeur dans $[e^{-1}, +\infty[$.
Or $g\left(u_n\right) = n$ donc $u_n = g^{-1}(n)$.

$\boxed{\text{On en déduit que } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} g^{-1}(n) = +\infty.}$

(d) D'après la question 5.b., $g\left(u_n\right) = n$.
Or $g\left(u_n\right) = n \Leftrightarrow u_n \ln\left(u_n\right) = n \Leftrightarrow \ln\left(u_n \ln\left(u_n\right)\right) = \ln(n) \Leftrightarrow \ln\left(u_n\right) + \ln\left(\ln\left(u_n\right)\right) = \ln(n)$.
L'écriture $\ln\left(\ln\left(u_n\right)\right)$ est valide car on a démontré en 5.b. que $u_n > 1$ et donc $\ln\left(u_n\right) > 0$.

Cas particulier

1. Soit $x \geq 0$.
   Si $x = 0$, $f_1(x) - x = 0 - 0 = 0$.
   Si $x > 0$, $f_1(x) - x = x\mathrm{e}^{-1/x} - x = x\left(\mathrm{e}^{-1/x} - 1\right) < 0$ car $\mathrm{e}^{-1/x} < 1$.

   $\boxed{\text{Ainsi } \forall x \geq 0,\ f_1(x) - x \leqslant 0 \text{ et l'équation } f_1(x) = x \text{ admet } 0 \text{ comme unique solution sur } [0, +\infty[.}$

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, 1]$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $v_n \in [0, 1]$.
   Initialisation
   $v_0 = 0 \in [0, 1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie .
   Hérédité
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $v_n \in [0, 1]$.
   Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $v_{n+1} \in [0, 1]$).
   Par hypothèse de récurrence, on a $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.
   La fonction f_1 étant croissante, on en déduit que $f_1(0) \leqslant f_1\left(v_n\right) \leqslant f_1(1)$.
   D'où $0 \leq v_{n+1} \leq \mathrm{e}^{-1}$.
   D'où $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$.
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
   Conclusion

   $\boxed{\text{Par le principe de récurrence, on en déduit que } \forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, 1].}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la question 6)a) : $v_{n+1} - v_n = f_1\left(v_n\right) - v_n \leqslant 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$

4. D'après les questions précédentes, la suite $\left(v_n\right)$ est décroissante et minorée.
   D'après le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \in [0, 1]$.
   Ainsi, on a :
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f_1(v_n)$
   - $\left(v_n\right)$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.
   - f_1 est est continue sur $[0, +\infty[$.

   D'après le théorème du point fixe, on en déduit que ℓ vérifie l'équation $f_1(\ell) = \ell$.

   $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge donc vers } 0 \text{ , car c'est l' unique point fixe de la fonction } f_1 \text{ (cf. q. 1)).}}$

5. ```
def f_1(x):
    if x>0:
        y=x*np.exp(-1/x)
    else:
        y=0
    return y

n=int(input('Donner une valeur de n:'))
v=1
for i in range(n):
    v= f_1(v)
print(v)
```

$\square$

**Problème 3**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre $n$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0 , et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{(3)}$$

On note $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$.

**Partie I**

On considère la matrice $J_n$ carrée d'ordre $n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (J_n)^k = n^{k-1} J_n$.
2. Exprimer $M_n$ en fonction de $I_n$ et $J_n$.
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que :
   $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n$, avec $c_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$.
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ c_k = \dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$.
5. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ , une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de $n$ et de $k$.

**Partie II**

Soit $n \geq 2$. On considère un graphe non orienté $K_n$ à $n$ sommets numérotés de 1 à $n$ ayant pour matrice d'adjacence $M_n$.

1. Représenter graphiquement les graphes $K_2, K_3, K_4$ et $K_5$.
2. Le graphe $K_n$ est-il complet ? connexe ? (à justifier).
3. Dans le graphe $K_4$, combien existe-t-il de chaînes (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même ?
4. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe $K_n$.
```

5. Le graphe K_n est-il eulérien (à justifier) ?
6. En utilisant le lemme d'Euler, montrer que le nombre total d'arêtes du graphe K_n est égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Solution. **Partie I**

1. Soit $n \geq 2$ (il fallait bien comprendre ici que n était fixé).
   Montrer par récurrence sur k (et non sur n !) que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (J_n)^k = n^{k-1} J_n$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(k) : (J_n)^k = n^{k-1} J_n$.
   Initialisation
   Pour $k = 1$, on a bien $J_n = n^0 J_n$.
   Donc $P(1)$ est vraie.
   Hérédité
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $P(k)$ vraie c'est à dire que $J_n^k = n^{k-1} J_n$.
   Montrons que $P(k+1)$ vraie c'est à dire que $J_n^k = n^k J_n$. .

   On a
   $$\begin{aligned} J_n^{k+1} &= J_n \cdot J_n^k \\ &= J_n \cdot n^{k-1} J_n \qquad\qquad \text{par HR} \\ &= n^{k-1} J^2 \\ &= n^{k-1} n J_n \\ &= n^k J_n, \end{aligned}$$
   car
   $$J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix} = nJ_n,$$
   Donc $P(k+1)$ est vraie.
   Conclusion
   $\boxed{\text{Par le principe de récurrence, on en déduit que } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ (J_n)^k = n^{k-1} J_n.}$
2. $\boxed{\text{De manière évidente } M_n = J_n - I_n.}$
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme J_n et $-I_n$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme pour écrire
   $$\begin{aligned} {M_n}^k &= (J_n - I_n)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \right) J_n \\ &\ \text{car } J_n^i = n^{i-1} J_n \text{ d'après q. 1)} \\ &= (-1)^k I_n + c_k J_n, \end{aligned}$$
   où on a posé
   $$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ (M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n, \text{ avec } c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.}.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par la formule du binôme (pour des nombres réels)

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i} - \frac{(-1)^k}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i}(-1)^{k-i} - (-1)^k\right) \\ &= \frac{1}{n}\left((n+(-1))^k - (-1)^k\right) \\ &= \boxed{\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En dehors de la diagonale, tous les coefficients de M^k sont égaux à c_k donc égaux à

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$$

Sur la diagonale, tous les coefficients de M^k sont égaux à $(-1)^k + c_k$ donc

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} + (-1)^k = \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}.$$

Partie II

1. Il s'agit de graphes complets
2. $\boxed{\text{Le graphe } K_n \text{ est complet}}$ pour tout $n \geq 2$ puisque tous les coefficients de la matrice d'adjacence valent 1 hors diagonale, ce qui signifie que tous les couples de sommets sont reliés par une arête. Le graphe est donc aussi connexe, puisque par conséquent tous les couples de sommets sont reliés par au moins une chaîne (même ici par une chaîne de longueur 1 que sont les arêtes).
3. Le nombre de chemins de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même est le coefficient à la première ligne et première colonne de la matrice M_4^4.
D'après la q.5) partie I, ce coefficient vaut

$$\frac{3^4 + 3(-1)^4}{4} = \frac{84}{4} = 21.$$

$\boxed{\text{Ainsi le nombre de chemins de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même vaut 21.}}$

4. Dans un graphe non orienté, le degré d'un sommet est le nombre de sommets adjacents à celui-ci.
Dans le graphe K_n, chaque sommet est adjacent aux $n-1$ autres sommets.
$\boxed{\text{Donc le degré de chaque sommet vaut } n-1.}$
5. 1er cas : n pair alors $n-1$ est impair.
Alors dans ce cas les sommets sont tous de degré impair et donc le graphe étant connexe il n'est pas eulérien.
2ème cas : n imppair alors $n-1$ est pair
Alors dans ce cas les sommets sont tous de degré pair et donc le graphe étant connexe il est eulérien.
$\boxed{\text{Ainsi, si } n \text{ est pair alors le graphe n'est pas eulérien et si } n \text{ est impair alors le graphe est eulérien.}}$

6. D'après le lemme des poignées de mains, la somme des degrés d'un graphe est égale au double du nombre des arêtes de ce graphe. Notant κ_n le nombre d'arêtes de K_n, et s_i le sommet numéro i, on a donc
$$\sum_{i=1}^{n}\deg(s_i) = 2\kappa_n \iff \sum_{i=1}^{n}(n-1) = 2\kappa_n \iff \kappa_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$
$$\boxed{\text{Ainsi le nombre total d'arête du graphe } K_n \text{ est } \tfrac{n(n-1)}{2}.}$$

□

Problème 4

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-y-z, -x-z, x+y+2z) \end{array} \right.$
et on pose $U = (1,1,-1)$ et $V = (-1,-1,2)$ et $W = (2,-1,-1)$.

Partie I

1. Justifier que f est une application linéaire et déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad f(X) = AX$.
2. Montrer que l'ensemble $E_A = \{x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = x\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.
3. Montrer que (V, W) est aussi une base de E_A.
4. Montrer que l'ensemble $F_A = \{x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = 0\}$ est un espace vectoriel et que U en est une base.
5. Déterminer la dimension de $Ker(f)$. f est -elle injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$?
6. Sans calculer $Im(f)$ déterminer sa dimension.
7. Déterminer une base de $Im(f)$ et retrouver les résultats de la question précédente.
8. f est-elle surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (à justifier) ?

Partie II

1. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère la matrice P qui contient les vecteurs U, V et W en colonne, c'est à dire $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
3. Écrire une commande Python pour définir la matrice P.
4. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$ et montrer alors que $A^2 = A$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

Solution. **Partie I**

1. f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, car il existe la matrice A tel que $\forall X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$. en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrons que E_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} x = (a,b,c) \quad &\in \quad E_A \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a-b-c=0 \\ -a-b-c=0 \\ -a-b-c=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \ -a-b-c=0 \right. \\ &\Leftrightarrow \quad c = -a-b \end{aligned}$$

D'où $E_A = \{(a,b,-a-b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(1,0,-1) + b(0,1,-1),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Ainsi $E_A = Vect\,((1,0,-1),(0,1,-1))$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } E_A \text{ est un espace vectoriel (comme espace engendré par certains vecteurs).}}$

De plus $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ forment une famille génératrice de E_A et aussi une famille libre, car de manière évidente les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$\boxed{\text{D'où ces deux vecteurs forment une base de } E_A.}$

3. Montrons que la famille (V,W) est une base de E_A.
   Tout d'abord on a par calcul $f(V) = V$ et $f(W) = W$.
   Donc la famille (V,W) est une famille de vecteurs de E_A.
   De plus la famille (V,W) est libre, car V et W ne sont pas colinéaires de manière évidente.
   D'après la question précédente, $dim(E_A) = 2 = Card((V,W))$.

   $\boxed{\text{D'où la famille } (V,W) \text{ est bien une base de } E_A.}$

4. Montrons que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x = (a,b,c) \quad \in \quad F_A \Leftrightarrow f(x) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -b-c=0 \\ -a-c=0 \\ a+b+2c=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-c \\ b=-c \end{array} \right.$$

   Ainsi $F_A = \{(-c,-c,c),\ c \in \mathbb{R}\} = \{c(-1,-1,1),\ c \in \mathbb{R}\} = Vect\,((-1,-1,1))$.

   $\boxed{\text{Par conséquent,} F_A \text{ est un espace vectoriel (comme espace engendré par certains vecteurs)}}$.

   De plus $U = (-1,-1,1)$ est générateur de F_A et par ailleurs il forme une famille libre car il est non nul.

   $\boxed{\text{D'où } U \text{ forme une base de } F_A.}$

5. Calculons : $Ker(f)$.
   On a $Ker(f) = F_A = Vect(U)$.
   D'où U est générateur de $Ker(f)$.
   De plus $U \neq O$, donc U forme une famille libre.

   $\boxed{\text{Ainsi } U \text{ est une base de } Ker(f) \text{ qui est donc de dimension 1.Par ailleurs } Ker(f) \neq \{0\}\text{, donc } f \text{ n'est pas}}$

6. D'après le théorème du rang :

$$dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}^3)$$

   $\boxed{\text{D'où } dim(Im(f)) = 3 - 1 = 2.}$

7. Pour déterminer Imf calculons $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$, où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On a :
   $f(\varepsilon_1) = (0,-1,1) = e'_1$
   $f(\varepsilon_2) = (-1,0,1) = e'_2$,
   $f(\varepsilon_3) = (-1,-1,2) = e'_3$.
   D'où $Im(f) = Vect\,(e'_1, e'_2, e'_3)$.
   On remarque que $e'_3 = e'_1 + e'_2$.

   $\boxed{\text{D'où } Im(f) = Vect(e'1, e'_2) = Vect\,((1,0,-1),(0,1,-1)) = E_A.}$

8. $\boxed{f \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ car } dim(Im(f) = 2 \neq dim(R^3)\text{.Donc } Im(f) \neq \mathbb{R}^3.}$

Partie II

1. Montrons que la famille (U,V,W) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On peut facilement montrer que la famille (U,V,W) est libre en montrant que $aU + bV + cW = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ (à faire).
   De plus $dim(\mathbb{R}^3) = 3 = Card((U,V,W))$.

   $\boxed{\text{Donc la famille } (U,V,W) \text{ est bien une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. Calculons la réduite de Gauss de P :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array} \right)$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mid L_2 \leftrightarrow L_3$$

On obtient une matrice triangulaire supérieure ayant tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Donc P est inversible.

On poursuit les calculs pour trouver P^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mid L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \right.$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{D'où } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}}.$$

3. La commande Python est '

```
P=np.array([[1,-1,2], [1,-1,-1],[-1,2,-1]])
```

4. On a $D = P^{-1}AP$.

   En effectuant le produit matriciel on trouve que $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 01 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a donc : $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = \boxed{A}$
   (car D étant une matrice diagonale, $D^2 = diag(0, 1^2, 1^2) = D$).

5. $\boxed{\text{Alors par récurrence immédiate (à faire), on en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = A.}$

□

Problème 5

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 disposés en pentagone, le site S_1 étant relié à celui S_2 par une route, celui S_2 étant relié au site S_3 par une route, ..., le site S_5 étant relié au site S_1 par une route.
Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.

1. Représenter la situation sous forme d'un graphe où les sommets représentent les sites et les arêtes les routes.
2. Le graphe est-il complet ? connexe ? eulérien ?

Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux probabilités étant équiprobables (autrement dit chacun choisit de se rendre sur un des sites voisins de celui où il se trouve avec même probabilité) ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacements se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

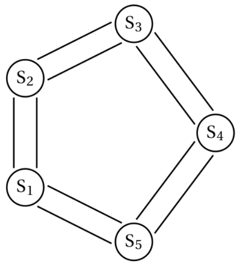
Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n et C_n :

— A_n : "les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement"
— B_n : "les deux personnes sont sur deux sites adjacents après le n-ième déplacement"
— C_n : "les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement"

On note a_n, b_n et c_n les probabilités des événements A_n, B_n et C_n.

1. Justifier que A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements.
2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_{(C_n)}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
   (b) Justifier : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$.
   (c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues, c'est à dire $P_{B_n}(A_{n+1}), P_{A_n}(B_{n+1}), P_{B_n}(B_{n+1}), P_{C_n}(B_{n+1}), P_{A_n}(C_{n+1}), P_{B_n}(C_{n+1}), P_{C_n}(C_{n+1})$.
4. Établir les relations suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &= \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \end{cases}$
5. (a) Déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n (indication : montrer que $b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$).
   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n.
   On fera intervenir les nombres $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\qquad c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.
6. (a) Exprimer a_n en fonction de n, α et β.
   On pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

Solution. 1. Voici le graphe



2. Le graphe n'est pas complet car toutes les paires de sommets ne sont pas reliées par une arête.

   Le graphe est connexe car toutes les paires de sommets sont reliés une chaîne.

   Le graphe est eulérien car le graphe est connexe et le degré de chaque sommet est pair.

1. La distance maximale entre deux sites est de deux routes.
   Donc A_n, B_n, C_n sont les seuls cas possibles.
   De plus, ces évènements sont incompatibles deux à deux,
   $\boxed{\text{Ainsi } A_n,\ B_n,\ C_n \text{ forment un système complet d'événements.}}$

2. A l'instant 0, les deux personnes sont sur des sites adjacents (S_1 et S_2). Ils sont donc à une route de distance.
   $\boxed{\text{D'où, } a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ c_0 = 0.}$

3. (a) Si les deux sont à deux routes de distance, ils se retrouvent sur le même site à condition qu'ils se dirigent tout deux dans la direction qui les rapproche.

   Chacun le fait avec une probabilté de $\dfrac{1}{2}$.

   $\boxed{\text{D'où, } \mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}.}$

   (b) S'ils sont tous les deux sur le même site, ils ne bougent plus, et donc ils restent ensemble.
   $\boxed{\text{D'où, } P_{A_n}(A_{n+1}) = 1.}$

   (c) Pour cette même raison, on a $\mathrm{P}_{A_n}(B_{n+1}) = 0$ et $\mathrm{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.
   $\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0$ (quand ils sont à une route de distance, car ils se croisent ou ils s'éloignent)

   $\mathrm{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens ; horaire avec une probabiltié $\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ou antihoraire, ou ils se croisent)

   $\mathrm{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (ils se fuient)

   $\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (dans le sens opposé qui les réuni)

   $\mathrm{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (dans le sens opposé qui les rapproche)

   $\mathrm{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens)

   Remarque : la q.4) donne en fait les réponses à cette question. En effet, si vous avez compris le mécanisme de ce type d'exercice, il s'agit ensuite d'appliquer la formule des probas totales pour trouver des relations de récurrence et cette formule fait intervenir les probas conditionnelles demandées. Cela vous donne ainsi une idée des valeurs à trouver et doit normalement vous permettre de comprendre pourquoi.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la formule des probas totales appliquées au sce (A_n, B_n, C_n) tous de probabilité non nulles, il vient :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{P}(A_{n+1}) & = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ & = \mathrm{P}(A_n)\,\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\,\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\,\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) \end{array}.$$

Puis en remplaçant par les valeurs, on trouve :
$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n$.

On procède de même pour les deux autres relations de récurrence. $\boxed{\left\{\begin{array}{c} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{array}\right.}$

5. (a) On a alors

$$\begin{array}{rcl} b_{n+2} & = & \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\ & = & \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) \\ & = & \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n \end{array}$$

Par ailleurs, $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$, d'où $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$.
En remplaçant c_n par l'expression trouvée dans la relation précédente, il vient :

$$\begin{array}{rcl} b_{n+2} & = & \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}(4b_{n+1} - 3b_n) \\ & = & \boxed{\frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n} \end{array}$$

(b) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc réCurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique est $r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{5}{16} = 0$ de discriminant $\Delta = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} = \frac{5}{16}$.
D'où, l'équation admet deux racines qui sont $\alpha = \frac{\frac{5}{4} - \frac{r5}{4}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.
D'après le cours, il existe donc deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$$

avec λ et μ solutions de :

$$\left\{\begin{array}{ll} b_0 & = \lambda + \mu \\ b_1 & = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\lambda + \frac{5+\sqrt{5}}{8}\mu \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1 & = \lambda + \mu \\ \frac{3}{4} & = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\lambda + \frac{5+\sqrt{5}}{8}\mu \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \mu & = 1 - \lambda \\ \frac{-2\sqrt{5}}{8}\lambda & = \frac{3}{4} - \frac{5+\sqrt{5}}{8} = \frac{1-\sqrt{5}}{8} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \mu & = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.$$

Conclusion : $\boxed{b_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right)}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$.

D'où,

$$\begin{aligned}
c_n &= 4\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\right)-3\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)\\
&= \frac{4}{5}\left(\left(4\alpha-3\right)\alpha\cdot\alpha^{n}+\left(4\beta-3\right)\beta\cdot\beta^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\left(4\alpha-3\right)\alpha &= \left(4\frac{5-\sqrt{5}}{8}-3\right)\frac{5-\sqrt{5}}{8}\\
&= -\frac{1}{4}\sqrt{5}\\
\left(4\beta-3\right)\beta &= \left(4\frac{5+\sqrt{5}}{8}-3\right)\frac{5+\sqrt{5}}{8}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } \forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n-\alpha^n\right)}$

6. (a) Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, $a_n+b_n+c_n=1$.
D'où

$$\begin{aligned}
a_n &= 1-b_n-c_n\\
&= 1-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n-\alpha^n\right)-\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)\\
&= 1-\alpha^n\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\alpha\right)-\beta^n\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\beta\right)\\
&= 1-\alpha^n\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)-\beta^n\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=1-\alpha^n\frac{5-3\sqrt{5}}{10}-\beta^n\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}$

(b) Et comme $|\alpha|<1$ et $|\beta|<1$ (car $2<\sqrt{5}<3$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta^n=0$.

$\boxed{\text{Ainsi } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1.}$

(c) Ne se retrouver jamais correspond à $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right)=0$

$\boxed{\text{On peut donc en conclure que les deux personnes se retrouveront presque surement.}}$

□