

23 mars 2024

Devoir surveillé n°4

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Exercice 1

Dans cet exercice, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

1. Justifier que son ensemble de définition est bien $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, en précisant la valeur en 0 de la fonction prolongée.

On appellera désormais f la fonction prolongée, définie sur $[0, +\infty[$ (notez bien que dorénavant f est donc la fonction prolongée de f définie sur $]0, +\infty[$ et non plus la fonction f définie au départ seulement sur $]0, +\infty[$).

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Est-elle dérivable en 0? Quelle est l'allure de la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$?
4. Dresser le tableau de variations de f , en précisant valeurs et limites aux bornes.
5. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et donner $f''(x)$ pour $x > 0$. Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe? Concave? Préciser les points d'inflexion de f s'il y en a.
6. Tracer la courbe de f en faisant apparaître tous les éléments notables précédents.
7. Écrire un programme Python permettant de définir la fonction f , puis écrire un programme Python permettant de tracer f sur $[0, 5]$ avec un pas de 0,01.

On donne : $e^{-2} \approx 0,14$ $2/e \approx 0,74$

Solution. 1. La quantité $\sqrt{x} \ln(x)$ est définie si la \sqrt{x} est définie c'est à dire si $x \geq 0$ et si $\ln(x)$ est définie c'est à dire si $x > 0$.

Conclusion : $D_f =]0, +\infty[$.

2. La fonction f est continue sur car c'est un produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
Regardons maintenant si f admet une limite finie en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ par croissance comparée.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et donc la limite de f en 0 existe et est finie

Conclusion : on peut prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

3. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est le produit de deux fonctions usuelles dérivables sur $]0, +\infty[$.

Étudions la dérivabilité de f en 0.

Soit $x \neq 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

En effet, $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$ et donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ par quotient, et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe mais n'est pas finie.

Conclusion : la fonction f n'est pas dérivable en 0.

On en déduit que la courbe de f admet une tangente verticale (dirigée vers le bas) en 0.

4. Soit $x > 0$.

On a

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x) + \sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$$

Comme $2\sqrt{x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) + 2$.

Or $\ln(x) + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -2 \Leftrightarrow x > e^{-2}$.

D'où f est strictement décroissante sur $]0, e^{-2}]$ et est strictement croissante sur $[e^{-2}, +\infty[$.

Avec $f(e^{-2}) = \sqrt{e^{-2}} \ln(e^{-2}) = \frac{-2}{\sqrt{e^2}} = -\frac{2}{e}$.

De plus, comme vu précédemment On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ par croissance comparée et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par produit.

5. La fonction f est \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

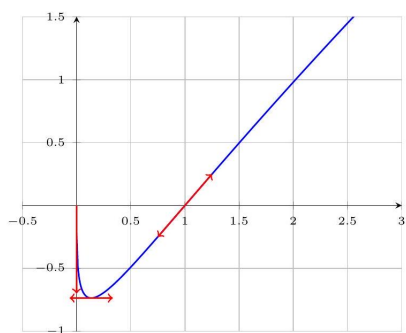
On en déduit que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, f''(x) = (f')'(x) = \frac{\frac{1}{x} 2\sqrt{x} - (\ln(x) + 2) 2 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(x) + 2}{\sqrt{x}}}{4x} = -\frac{\ln(x)}{4x\sqrt{x}}$$
$$\forall x > 0, f''(x) = -\frac{\ln(x)}{4x\sqrt{x}}$$

De manière évidente, comme $x > 0$, on en déduit que $f''(x)$ est du signe opposé à celui de $\ln(x)$.

Ainsi, $\forall x \in]0, 1]$, $f''(x) \geq 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f''(x) \leq 0$.

Conclusion : f est convexe sur $]0, 1]$ et concave sur $[1, +\infty[$ et admet un point d'inflexion en 0.



6.

```

7. def f(x):
    if x>0:
        y=np.sqrt(x)*np.log(x)
    elif x==0:
        y=0
    return y

x=np.arange(0.01, 5.01, 0.01)
plt.plot(x,f(x),'b', label='Courbe de f')
plt.show()

```

□

Problème 1

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0, +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \quad 7,3 < e^2 < 7,4 \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
3. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
5. Étudier les variations de la fonction $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = f'(x) - x$.
6. En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Écrire un programme Python permettant de calculer et de tracer les n premiers termes de la suite (u_n) , n étant donné par l'utilisateur.
2. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 2$.
3. Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{cases} [2, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - x \end{cases}$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
6. Écrire un programme Python qui, étant donné un réel A , renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.
7. Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[, 2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.
8. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n$, puis retrouver le résultat de la question 5).

Solution. Partie I : Étude de la fonction f

1. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en tant que fonctions usuelles.
D'où, la fonction f est \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \text{ et } f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$$

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[, f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$.
La fonction f' est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

Enfin $f'(1) = e^1 - \frac{e}{1} = 0$.

3. La fonction f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Ainsi $\forall x \in]0, 1[, f'(x) < f'(1) = 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) > f'(1) = 0$.
Donc f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Déterminons la limite de f en 0 .

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

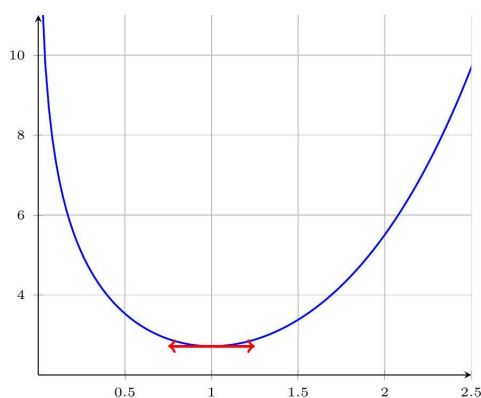
Déterminons alors la limite de f en $+\infty$.

On a $f(x) = e^x - e \ln(x) = e^x \left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x} \right)$.

Par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par somme et produit.

Enfin $f(1) = e^1 - e \ln(1) = e$.



4.

5. La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, u'(x) = f''(x) - 1 = e^x + \frac{e}{x^2} - 1 = \frac{x^2 e^x + e - x^2}{x^2} = \frac{x^2(e^x - 1) + e}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, on en déduit que le signe de $u'(x)$ est celui de $x^2(e^x - 1) + e$.

Or, $x > 0$, d'où $e^x > e^0 = 1$ et donc $e^x - 1 > 0$.

De plus, $x^2 > 0$ et $e > 0$.

D'où $\forall x > 0, u'(x) > 0$.

La fonction u est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

D'après 2) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$.

Déterminons alors la limite de f en $+\infty$.

Soit $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$u(x) = e^x - \frac{e}{x} - x = e^x \left(1 - \frac{e}{xe^x} - \frac{x}{e^x} \right)$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{xe^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

6. Soit $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = x \Leftrightarrow f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$.

On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

La fonction u est continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$).

D'où, d'après le théorème de la bijection, la fonction u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $u(]0, +\infty[)$.

Or $u(]0, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow 0} u(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)[=] -\infty, +\infty[$.

D'où $0 \in] -\infty, +\infty[$.

Donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que l'équation $f'(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

Par ailleurs :

(a) $u(\alpha) = 0$

(b) $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$

(c) $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 0$

En effet, d'après les encadrements donnés par l'énoncé, on a

— $7,3 < e^2 < 7$ et donc $5,3 < e^2 - 2 < 5,4$

— $2,7 < e < 2,8$ et donc $1,35 < \frac{e}{2} < 1,4$ et donc $-1,4 < -\frac{e}{2} < -1,35$

Ainsi $3,9 < e^2 - 2 - \frac{e}{2} < 4,05$.

On en conclut $u(2) > 3,9 > 0$.

On en déduit $u(1) < u(\alpha) < u(2)$.

Or, d'après le théorème de la bijection, $u^{-1} :]-\infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$.

En appliquant u^{-1} , on obtient alors $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

1.

```
n=int(input("Valeur de n:"))
u=2
for i in range(1,n+1):
    u=np.exp(u) -np.exp(1)*np.log(u)
    plt.plot(i, u, 'x')
plt.show()
```

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 2$.

On pose $\mathcal{P}(n) : u_n$ existe et $u_n \geq 2$.

Initialisation :

D'après l'énoncé : $u_0 = 2 \geq 2$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq 2$).

Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 2$.

Or la fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.

Or $u_n \geq 2$, donc $u_n \in]0, +\infty[$.

Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.

De plus, d'après la q.3), e est le minimum de f sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \geq e$.

En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in]0, +\infty[$, on obtient $u_{n+1} \geq e > 2$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 2$.

3. La fonction g est dérivable sur $[2, +\infty[$ car elle est la somme de deux fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$ et

$$\forall x \in [2, +\infty[, g'(x) = f'(x) - 1$$

D'après la question 2), la fonction f' est croissante sur $[2, +\infty[\subset]0, +\infty[$.

D'où $\forall x \in [2, +\infty[, f'(x) \geq f'(2)$

Or, avec les encadrements donnés par l'énoncé : $f'(2) = e^2 - \frac{e}{2} \geq 7,3 - 1,4 = 5,9 > 1$.

On en déduit $\forall x \in [2, +\infty[, f'(x) > 1$.

D'où $\forall x \in [2, +\infty[, g'(x) > 0$.

D'où g est croissante sur $[2, +\infty[$ et donc

$$\forall x \geq 2, g(x) \geq g(2)$$

De plus, $g(2) = f(2) - 2 = e^2 - e \ln(2) - 2$.

Or d'après les encadrements de l'énoncé $7,3 < e^2 < 7,4$ et $2,7 < e < 2,8$ et $0,6 < \ln(2) <$

0,7.
D'où :

$$\begin{array}{ccc} 2,7 \times 0,6 < e \ln(2) < 2,8 \times 0,7 \\ \parallel & & \parallel \\ 1,62 & & 1,96 \end{array}$$

Ainsi : $-1,96 < -e \ln(2) < -1,62$.

On en déduit que $g(2) = e^2 - e \ln(2) - 2 > 7,3 - 1,96 - 2 = 3,34$.

D'où $g(2) > 0$.

Conclusion : $\forall x \in [2, +\infty[, g(x) > 0$

4. D'après la question précédente, $\forall x \geq 2, g(x) > 0$.

Autrement dit, pour tout $x \geq 2, f(x) > x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $x = u_n \geq 2$ (q.2.), on obtient

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est donc croissante.

5. On sait que la suite (u_n) est croissante.

Donc soit (u_n) est majorée et alors elle converge, soit (u_n) n'est pas majorée et alors elle diverge vers $+\infty$.

Démontrons que (u_n) n'est pas majorée.

Par l'absurde, supposons que la suite (u_n) est majorée.

Dans ce cas, la suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ .

Or, d'après la q.2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$, d'où $\ell \geq 2$.

Ainsi on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) converge vers $\ell \geq 2$.
- La fonction f est continue sur $[2, +\infty[$, elle est donc en particulier continue en ℓ .

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow g(\ell) = 0.$$

Absurde !

En effet, d'après la q.3), $\forall x \geq 2, g(x) > 0$.

En particulier : $\forall x \geq 2, g(x) \neq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) n'est pas majorée et diverge donc vers $+\infty$.

6. `A=int(input('Entrez un réel A:'))`

```
N=0
```

```
u=2
```

```
while u<A:
```

```
    N=N+1
```

```
    u=np.exp(u)-np.exp(1)*np.log(u)
```

```
print(N)
```

7. Démontrons tout d'abord : $\forall x \in [2, +\infty[, 2 \ln(x) \leq x$.

La fonction $h : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.

Sa courbe représentative \mathcal{C}_h est donc située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 2.

Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned}
y &= h(2) + h'(2)(x - 2) \\
&= \ln(2) + \frac{1}{2}(x - 2)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \left[2, +\infty\right[, \quad \ln(x) \leq \ln(2) + \frac{1}{2}(x - 2)$$

Ainsi, pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$2 \ln(x) \leq 2 \ln(2) + (x - 2) = x + 2(\ln(2) - 1)$$

Or, comme $0,6 < \ln(2) < 0,7$, alors $2(\ln(2) - 1) < 0$.

D'où $x + 2(\ln(2) - 1) < x$.

Finalement par transitivité, $\forall x \in [2, +\infty[$, $2 \ln(x) \leq x$.

Démontrons maintenant $\forall x \in [2, +\infty[$, $x \leq \frac{e^x}{3}$.

Considérons la fonction $h : x \mapsto \frac{e^x}{3} - x$.

La fonction h est dérivable sur $[2, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$ et

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad h'(x) = \frac{e^x}{3} - 1 = \frac{e^x - 3}{3}.$$

Comme $3 > 0$, la quantité $h'(x)$ est du signe de $e^x - 3$.

Or, comme $x \geq 2$, par croissance de la fonction \exp sur \mathbb{R} , on a $e^x \geq e^2 > 7,3$.

Et ainsi $e^x - 3 > 4,3 > 0$.

D'où $\forall x \in [2, +\infty[$, $h'(x) > 0$.

D'où h est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in [2, +\infty[$, $h(x) \geq h(2) \geq 0$.

Or $h(2) = \frac{e^2}{3} - 2 = \frac{e^2 - 6}{3} > 0$ car $e^2 > 7,3$.

On en conclut : $\forall x \in [2, +\infty[$, $x \leq \frac{e^x}{3}$.

Remarque :

Pour démontrer la première inégalité, il est bien évidemment possible de passer par l'étude du signe de la fonction $\varphi : x \mapsto x - 2 \ln(x)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e \ln(u_n)$.

De plus, d'après la question précédente, $\forall x \in [2, +\infty[$, $2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$

En appliquant cette double inégalité à $x = u_n \in [2, +\infty[$, on obtient :

$$2 \ln(u_n) \leq u_n \leq \frac{e^{u_n}}{3}$$

On en déduit que $2 \ln(u_n) \leq u_n$.

Ainsi $-e \ln(u_n) \geq -\frac{e}{2}u_n$.

D'autre part, $u_n \leq \frac{e^{u_n}}{3}$, d'où $e^{u_n} \geq 3u_n$.

On obtient alors $u_{n+1} = e^{u_n} - e \ln(u_n) \geq 3u_n - \frac{e}{2}u_n \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2}u_n$.

Par une récurrence simple, on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2 \left(\frac{6-e}{2}\right)^n$.

Et en appliquant le théorème de comparaison, on retrouve que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

□

Problème 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie 1. Etude des puissances de T .

1. Prouver que pour tout élément n de \mathbb{N} il existe un réel α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

On donnera la valeur de α_0 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n .

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = n2^{n-1}$.

Partie 2. Etude de la matrice A .

1. Résoudre les trois systèmes suivants :

$$(E_1) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = x \\ x + 2z = y \\ 2z = z \end{cases} \quad (E_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2x \\ x + 2z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \quad (E_3) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2x + 2 \\ x + 2z = 2y + 1 \\ 2z = 2z \end{cases}$$

2. Montrer que la matrice P est inversible, calculer son inverse.
3. Vérifier que $A = PTP^{-1}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$. En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n .
5. $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on appelle commutant de A et on note $C(A)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices qui commutent avec A :

$$M \in C(A) \Leftrightarrow AM = MA.$$

- (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère la matrice M' définie par $M' = P^{-1}MP$.
Exprimer M en fonction de M', P et P^{-1} .
- (b) Montrer que la matrice M vérifie l'égalité $AM = MA$ si et seulement si la matrice M' vérifie $TM' = M'T$.
- (c) Montrer qu'une matrice U , carrée d'ordre 3 vérifie $TU = UT$ si et seulement U est de la forme $\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & g & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$ où e, f, g sont trois réels.
- (d) En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Solution. Partie 1. Etude des puissances de T .

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons (\mathcal{P}_n) : il existe un réel α_n tel que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Initialisation

$$T^0 = I \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, en choisissant $\alpha_0 = 0$, il existe bien un réel α_0 tel que $T^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$.

Donc (\mathcal{P}_0) est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Supposons (\mathcal{P}_n) vraie, c'est à dire qu'il existe un réel α_n tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Et montrons (\mathcal{P}_{n+1}) , c'est à dire qu'il existe un réel α_{n+1} tel que

$$T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & \alpha_{n+1} \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}. \text{ On a :}$$

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, en choisissant le réel $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$, on a bien $T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & \alpha_{n+1} \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Donc (\mathcal{P}_{n+1}) est vraie.

Conclusion

par le principe de récurrence on en déduit que ,

$$\text{il existe un réel } \alpha_n \text{ tel que } T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n.$$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : \alpha_n = n2^{n-1}$.

Initialisation

On a $\alpha_0 = 0$ et $0 \times 2^{0-1} = 0$ donc $\alpha_0 = 0 \times 2^{0-1}$.

D'où (\mathcal{P}_0) est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Supposons que (\mathcal{P}_n) , c'est à dire $\alpha_n = n2^{n-1}$.

Et montrons (\mathcal{P}_{n+1}) , c'est à dire $\alpha_{n+1} = (n+1)2^n$.

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n = 2(n2^{n-1}) + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n$$

Donc (\mathcal{P}_{n+1}) est vraie.

Conclusion

Par le principe de récurrence on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = n2^{n-1}$.

Partie 2. Etude de la matrice A.

1.

$$(E_1) \quad : \quad \begin{cases} 3x - 2y + 3z = x \\ x + 2z = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{Donc } \boxed{S = \{(y, y, 0), \quad y \in \mathbb{R}\}}$$

$$(E_2) \quad : \quad \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2x \\ x + 2z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \boxed{S = \{(2y, y, 0), \quad y \in \mathbb{R}\}}$$

$$(E_3) \quad : \quad \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2x + 2 \\ x + 2z = 2y + 1 \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ -z = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \boxed{S = \{(2y - 1, y, 1), \quad y \in \mathbb{R}\}}.$$

2. Calcule la réduite de Gauss de la matrice P :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

La nouvelle matrice est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible, ce qui implique l'inversibilité de P .

On poursuit pour trouver l'inverse de P .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Vérification : $PP^{-1} = I$ par calcul direct)

3. Par calcul, on montre que $PT = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis que $PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$.

4. On procède de nouveau par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : A^n = PT^n P^{-1}$.

Initialisation

On a $A^0 = I$ et $PT^0 P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $A^0 = PT^0 P^{-1}$, ce qui démontre (\mathcal{P}_0) .

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Supposons que (\mathcal{P}_n) soit vraie et montrons (\mathcal{P}_{n+1}) , i.e. supposons que $A^n = PT^n P^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PT^{n+1} P^{-1}$.

D'après la question 1.b), on a $A = PTP^{-1}$ donc on peut écrire

$$A^{n+1} = A^n A \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} P T^n P^{-1} P T P^{-1} = P T^{n+1} P^{-1}$$

ce qui démontre (\mathcal{P}_{n+1}) et achève la récurrence.

On en déduit immédiatement que :

$$PT^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} & (n-1)2^n \\ 1 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} & (n-1)2^n \\ 1 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, après calcul, on trouve que $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 & 2^n(n+1) - 1 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 & 2^n(n+2) - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Remarquez que pour $n = 0$ et $n = 1$, la formule est vraie.

5. (a) $M' = P^{-1}MP \Leftrightarrow \boxed{PM'P^{-1} = M}$. (multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1} , de part et d'autre de l'égalité).

$$AM = MA \Leftrightarrow PTP^{-1}PM'P^{-1} = PM'P^{-1}PTP^{-1} \Leftrightarrow PTM'P^{-1} = PM'TP^{-1} \Leftrightarrow TM' = M'T,$$

par multiplication à gauche par P^{-1} et à droite par P , de part et d'autre de l'égalité.

- (b) On se lance dans un calcul directement en écrivant $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$TU = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & h+2e & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}, \quad UT = \begin{pmatrix} a & 2b & b+2c \\ d & 2e & 2f+e \\ g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$$

$$UT = TU \Leftrightarrow \begin{cases} a = a & 2f+i = 2f+e \\ b = 2b & 2g = g \\ c = b+2c & 2h = 2h \\ 2d+g = d & 2i = h+2i \\ h+2e = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b+c = 0 \\ d+g = 0 \\ h = 0 \\ i = e \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ g = 0 \\ d = 0 \\ h = 0 \\ i = e \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{U = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad (a, e, f) \in \mathbb{R}^3}$.

- (c) En combinant les questions 5.a) et 5.b), on en déduit donc $M'T = TM'$ si et seulement

$$\text{si } M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors la caractérisation suivante (la dernière égalité s'obtenant par calcul direct) :

$$AM = MA \Leftrightarrow TM' = M'T \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi $M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

□

Problème 3

L'objet du problème est d'étudier les solutions des équations

$$x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0$$

où N est un entier strictement positif et a un nombre réel strictement positif. La première question est consacrée au cas particulier $a = 1$ et $N = 2$. La deuxième question traite le cas général.

Partie I : Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule solution dans l'intervalle $]0, 1[$, que l'on notera r_2 . Préciser la valeur de r_2 .
2. Montrer que si x est un réel de l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$, alors $f(x)$ appartient aussi à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
3. Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$$

4. Prouver l'inégalité suivante, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$$

En déduire qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

5. À partir de quelle valeur de n le terme u_n est-il une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près ?
On choisira la réponse parmi : $n = 9, 18, 24$, ou 36 .
On donne : $\ln 10 \simeq 2,30$ $\ln 2 \simeq 0,69$ $\ln 3 \simeq 1,10$.

Partie II : Étude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0$

On note f_N la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a$.

1. Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive x_N .
Montrer que lorsque $N > a$, on a $x_N \in]0, 1[$.
2. Montrer la relation :

$$(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$$

3. Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante. Montrer que x_N converge vers un nombre x^* appartenant à $]0, 1[$, quand N tend vers $+\infty$.
4. Soit A un entier naturel non nul tel que $A \leq N$. Montrer que $0 < x_N^N \leq x_A^N$.
En choisissant $A \geq a$, en déduire la limite de x_N^N lorsque N tend vers $+\infty$ puis, à l'aide de la question 2), exprimer x^* en fonction de a .
On convient alors de poser $x_N = \frac{a}{a+1}(1 + \varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
5. Établir à l'aide de la relation de la question 2) l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1 + \varepsilon_N) \right] = \varepsilon_N \ln \varepsilon_N + \varepsilon_N \ln a$$

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1 + \varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Solution. Partie I : Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)

1. Notons $P(X) = X^2 + X - 1$.
 P est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 1^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.
Ainsi, P admet deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Or $4 < 5 < 9$.

Donc $2 < \sqrt{5} < 3$ et $-2 > -\sqrt{5} > -3$.

On en déduit :

$$-3 > -1 - \sqrt{5} > -4 \quad \text{et} \quad 1 < 1 + \sqrt{5} < 2$$

Ainsi $r_1 \in]-2, -\frac{3}{2}[$ et $r_2 \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Conclusion : l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ comme unique solution dans $]0, 1[$.

2. Soit $x \in]\frac{1}{2}, 1[$.
On a $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.
Donc $\frac{3}{2} \leq x+1 \leq 2$.
Et donc $\frac{2}{3} \geq \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2}$ (par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{+*}).
Comme $\frac{2}{3} \leq 1$, on en déduit que $f(x) \in]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \subset]\frac{1}{2}, 1[$.
Démontrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]\frac{1}{2}, 1[$.
On pose $\mathcal{P}(n) : u_n \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Initialisation :

$u_0 = 1 \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ c'est à dire $u_n \in]\frac{1}{2}, 1[$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $u_{n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in]\frac{1}{2}, 1[$.

On en déduit donc, par la propriété que l'on vient de montrer, que $f(u_n) \in]\frac{1}{2}, 1[$.

D'où $u_{n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ et

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]\frac{1}{2}, 1[$.

3. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^+ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto x+1$, qui est dérivable sur \mathbb{R}^+ (en tant que fonction polynomiale) et qui ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ .

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| = \left| \frac{-1}{(x+1)^2} \right| = \frac{|-1|}{|(x+1)^2|} = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

On a $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

Donc $\frac{3}{2} \leq x+1 \leq 2$.

Et donc $\frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2 \leq (x+1)^2 \leq 2^2 = 4$

(par croissance de la fonction carrée sur \mathbb{R}^+).

D'où $\frac{4}{9} \geq \frac{1}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{2}$

(par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{+*}).

Conclusion : $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

4. D'après les questions précédentes :

- f est dérivable sur $[\frac{1}{2}, 1]$,
- $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $x = r_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(r_2)| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$$

Or r_2 vérifie $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$, donc $r_2^2 + r_2 = 1$ d'où $r_2(r_2 + 1) = 1$ et donc $r_2 = \frac{1}{r_2 + 1} = f(r_2)$.

On en conclut : $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$.

Démontrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq (\frac{4}{9})^n$.

On pose $\mathcal{P}(n) : |u_n - r_2| \leq (\frac{4}{9})^n$.

Initialisation :

$|u_0 - r_2| \leq \frac{1}{2} \leq 1$ car u_0 et r_2 sont des éléments de $[\frac{1}{2}, 1]$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ (c'est à dire $|u_n - r_2| \leq (\frac{4}{9})^n$) et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est à dire que $|u_{n+1} - r_2| \leq (\frac{4}{9})^{n+1}$).

D'après le résultat précédent $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$.

Or, par hypothèse de récurrence $|u_n - r_2| \leq (\frac{4}{9})^n$.

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2| \leq \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^n = \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq (\frac{4}{9})^n$.

5. Pour que u_n soit une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près, il suffit que : $(\frac{4}{9})^n \leq 10^{-6}$.

En effet, si c'est le cas on obtient par transitivité : $|u_n - r_2| \leq (\frac{4}{9})^n \leq 10^{-6}$.

$$\text{Or } \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-6} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{4}{9}\right) \leq -6 \ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{-6 \ln(10)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}$$

car $\ln\left(\frac{4}{9}\right) < 0$ car $\frac{4}{9} < 1$.

De plus

$$\begin{aligned} \frac{-6 \ln(10)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} &= \frac{-6 \ln(10)}{\ln(4) - \ln(9)} = \frac{-6 \ln(10)}{\ln(2^2) - \ln(3^2)} = \frac{-6 \ln(10)}{2 \ln(2) - 2 \ln(3)} \\ &= \frac{-6 \ln(10)}{2(\ln(2) - \ln(3))} = \frac{-3 \ln(10)}{\ln(2) - \ln(3)} = \frac{3 \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)} \end{aligned}$$

Enfin

$$\frac{3 \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)} \simeq \frac{3 \times 2,3}{1,1 - 0,7} = \frac{6,9}{0,4} = \frac{6,9}{\frac{4}{10}} = \frac{10 \times 6,9}{4} = \frac{69}{4}$$

Comme $68 < 69 \leq 72$, on a $17 < \frac{69}{4} \leq 18$, le choix de $n = 18$ assure que u_n est une approximation de r_2 à 10^{-6} près.

Partie II : Étude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0$

1. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f_N(x) = \left(\sum_{k=1}^N x^k\right) - a$.

D'où f_N est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_N(x) = \left(\sum_{k=1}^N kx^{k-1}\right).$$

Ainsi, pour tout $x > 0, f'_N(x) > 0$ comme somme de termes strictement positifs.

On en déduit que f_N est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} .

La fonction f_N est continue sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

D'où d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f_N(]0, +\infty[)$.

Or $f_N(]0, +\infty[) =]f_N(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_N(x)[=]-a, +\infty[$

car $f_N(0) = -a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_N(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^N = +\infty$.

Or $a > 0$ donc $0 \in]-a, +\infty[$.

Conclusion : on en déduit donc que l'équation $f_N(x) = 0$ admet une unique solution $x_N \in]0, +\infty[$.

Supposons $N > a$.

Calculons $f_N(1)$. On a $f_N(1) = \left(\sum_{k=1}^N 1^k\right) - a = N - a > 0 = f_N(x_N)$.

En appliquant de part et d'autre f_N^{-1} , strictement croissante car de même monotonie que f_N , on obtient que $1 > x_N$.

Conclusion : si $N > a$, on a bien $x_N \in]0, 1[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } (x-1) \left(\sum_{k=1}^N x^k\right) = \sum_{k=1}^N x^k(x-1) = \sum_{k=1}^N (x^{k+1} - x^k) = x^{N+1} - x^1 = x^{N+1} - x.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} (x-1)f_N(x) &= (x-1) \left(\left(\sum_{k=1}^N x^k\right) - a\right) \\ &= (x-1) \left(\sum_{k=1}^N x^k\right) - (x-1)a \\ &= x^{N+1} - x - ax + a = x^{N+1} - (a+1)x + a \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, (x-1)f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$

3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

Par définition :

$$f_{N+1}(x) = \left(\sum_{k=1}^{N+1} x^k \right) - a = x^{N+1} + \left(\sum_{k=1}^N x^k \right) - a = x^{N+1} + f_N(x)$$

Ainsi $f_{N+1}(x_N) = (x_N)^{N+1} + f_N(x_N) > f_N(x_N)$ car $x_N > 0$.

D'autre part, comme $f_{N+1}(x_{N+1}) = 0 = f_N(x_N)$, l'inégalité précédente peut s'écrire :

$$f_{N+1}(x_N) > f_{N+1}(x_{N+1})$$

En appliquant de part et d'autre f_{N+1}^{-1} , strictement croissante, on obtient $x_N > x_{N+1}$.
La suite (x_N) est donc strictement décroissante.

Considérons maintenant $N > a$. D'après la question 1), on a $x_N \in]0, 1[$.

La suite (x_N) est décroissante et minorée par 0 .

Elle converge donc vers une limite x^* telle que $x^* \in [0, 1]$.

(Attention ! Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges)

Il reste alors à démontrer que $x^* \neq 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > a$.

En utilisant une nouvelle fois la question 1), on obtient $x_p < 1$.

Comme (x_N) est décroissante, pour tout $N \geq p$, on a $x_N \leq x_p$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient $x^* \leq x_p < 1$.

Conclusion : $x^* \in [0, 1[$.

4. La suite (x_N) étant décroissante, et comme $A \leq N$, on a $x_N \leq x_A$.

Les éléments de (x_N) étant strictement positifs, on a $0 < x_N \leq x_A$.

Par stricte croissance de la fonction élévation à la puissance N sur \mathbb{R}^+ , il vient

$$0^N < x_N^N \leq x_A^N$$

autrement dit

$$0 < x_N^N \leq x_A^N$$

Si $A > a$, on a $x_A \in]0, 1[$.

Donc $(x_A)^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit, par le théorème d'encadrement, que (x_N^N) est convergente, de limite 0 .

En écrivant la relation obtenue en 2) pour $x = x_N$, on obtient

$$(x_N - 1) f_N(x_N) = (x_N)^{N+1} - (a + 1)x_N + a$$

autrement dit

$$(x_N)^{N+1} - (a + 1)x_N + a = 0 \text{ puisque, par définition, } f_N(x_N) = 0$$

Par passage à la limite dans cette égalité, on obtient $0 - (a + 1)x^* + a = 0$.

Conclusion : $(a + 1)x^* = a$, c'est à dire que $x^* = \frac{a}{a+1}$ puisque $a + 1 > 0$.

5. En question 2), on a démontré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x - 1)f_N(x) = x^{N+1} - (a + 1)x + a$$

En prenant cette relation en $x = x_N$, on obtient :

$$(x_N - 1) f_N(x_N) = x_N^{N+1} - (a + 1)x_N + a$$

Comme $f_N(x_N) = 0$, on en déduit $x_N^{N+1} = (a+1)x_N - a$.

Enfin, en remplaçant x_N par la valeur fournie par l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1} (1+\varepsilon_N)^{N+1} &= a(1+\varepsilon_N) - a \\ &= a\varepsilon_N \end{aligned}$$

Afin d'appliquer la fonction \ln de part et d'autre de cette égalité, on doit vérifier que toutes les quantités sont strictement positives.

On a bien $a > 0$ d'après l'énoncé et $\varepsilon_N > 0$.

En effet, par stricte décroissance de la suite (x_N) , on a $x_N > x^*$.

Et, comme $x^* = \frac{a}{a+1}$, on en déduit que $1 + \varepsilon_N > 1$ c'est à dire que $\varepsilon_N > 0$.

Ainsi :

$$(N+1) \left(\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N) \right) = \ln(a) + \ln(\varepsilon_N)$$

D'où, en multipliant de part et d'autre ε_N :

$$(N+1)\varepsilon_N \left(\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N) \right) = \varepsilon_N \ln(a) + \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N)$$

On déduit de l'égalité précédente :

$$(N+1)\varepsilon_N = \frac{\varepsilon_N \ln(a) + \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N)}{\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)}$$

On note au passage que le dénominateur est non nul car :

$$\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N) = 1$$

Cette dernière égalité signifierait que $x_N = 1$, ce qui n'a pas de sens puisque la suite (x_N) est strictement décroissante.

Or

- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_N \ln(a) = 0$ car $\varepsilon_N \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N) = \ln\left(\frac{a}{a+1}\right) \neq 0$ car $a \neq a+1$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (N+1)\varepsilon_N = 0$.

D'autre part : $(1+\varepsilon_N)^{N+1} = \exp((N+1)\ln(1+\varepsilon_N)) = \exp\left((N+1)\frac{\ln(1+\varepsilon_N)}{\varepsilon_N}\varepsilon_N\right)$.

Or

- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\varepsilon_N)}{\varepsilon_N} = 1$ car $\varepsilon_N \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1)\varepsilon_N = 0$ d'après la question précédente.

On en déduit que $\lim_{N \rightarrow +\infty} (1+\varepsilon_N)^{N+1} = e^0 = 1$

□