23 mars 2024

Devoir surveillé n°4

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Exercice 1

Dans cet exercice, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction f par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x}\ln x$$

1. Justifier que son ensemble de définition est bien $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 , en précisant la valeur en 0 de la fonction prolongée.

   On appellera désormais f la fonction prolongée, définie sur $[0,+\infty[$ (notez bien que dorénavant f est donc la fonction prolongée de f définie sur $[0,+\infty[$ et non plus la fonction f définie au départ seulement sur $]0,+\infty[$).
3. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Est-elle dérivable en 0 ?
   Quelle est l'allure de la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$?
4. Dresser le tableau de variations de f, en précisant valeurs et limites aux bornes.
5. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et donner $f''(x)$ pour $x > 0$.
   Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Concave ? Préciser les points d'inflexion de f s'il y en a.
6. Tracer la courbe de f en faisant apparaître tous les éléments notables précédents.
7. Écrire un programme Python permettant de définir la fonction f, puis écrire un programme Python permettant de tracer f sur $[0,5]$ avec un pas de $0,01$.

On donne : $\mathrm{e}^{-2} \approx 0,14 \quad 2/e \approx 0,74$

Problème 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \quad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
3. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
5. Étudier les variations de la fonction $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = f'(x) - x$.
6. En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Écrire un programme Python permettant de calculer et de tracer les n premiers termes de la suite (u_n), n étant donné par l'utilisateur.
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$.
3. Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{cases} [2,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f(x) - x \end{cases}$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
6. Écrire un programme Python qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.
7. Démontrer : $\forall x \in \left[2,+\infty\right[, 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{3}$.
8. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$, puis retrouver le résultat de la question 5).

Problème 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie 1. Etude des puissances de T.

1. Prouver que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ il existe un réel α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

   On donnera la valeur de α_0 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = n2^{n-1}$.

Partie 2. Etude de la matrice A.

1. Résoudre les trois systèmes suivants :

$$(E_1) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = x \\ x + 2z = y \\ 2z = z \end{cases} \quad (E_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2x \\ x + 2z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \quad (E_3) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2x + 2 \\ x + 2z = 2y + 1 \\ 2z = 2z \end{cases}$$

2. Montrer que la matrice P est inversible, calculer son inverse.
3. Vérifier que $A = PTP^{-1}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}$. En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
5. $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on appelle commutant de A et on note $C(A)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices qui commutent avec A :

$$M \in C(A) \Leftrightarrow AM = MA.$$

   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On considère la matrice M' définie par $M' = P^{-1}MP$.
   Exprimer M en fonction de M', P et P^{-1}.

   (b) Montrer que la matrice M vérifie l'égalité $AM = MA$ si et seulement si la matrice M' vérifie $TM' = M'T$.

   (c) Montrer qu'une matrice U, carrée d'ordre 3 vérifie $TU = UT$ si et seulement U est de la forme $\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & g & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$ où e, f, g sont trois réels.

   (d) En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Problème 3

L'objet du problème est d'étudier les solutions des équations

$$x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$$

où N est un entier strictement positif et a un nombre réel strictement positif. La première question est consacrée au cas particulier $a = 1$ et $N = 2$. La deuxième question traite le cas général.

Partie I : Résolution numérique de l'équation $x^2+x-1=0 \quad (0<x<1)$

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $x^2+x-1=0$ a une seule solution dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera r_2. Préciser la valeur de r_2.
2. Montrer que si x est un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$, alors $f(x)$ appartient aussi à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.
3. Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$:
$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$$
4. Prouver l'inégalité suivante, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1}-r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n-r_2|$$
En déduire qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_n-r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$$
5. À partir de quelle valeur de n le terme u_n est-il une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près ?
On choisira la réponse parmi : $n=9,18,24,$ ou 36 .
On donne : $\ln 10 \simeq 2,30 \quad \ln 2 \simeq 0,69 \quad \ln 3 \simeq 1,10$.

Partie II : Étude de l'équation $x^N+x^{N-1}+\cdots+x^2+x-a=0$

On note f_N la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_N(x)=x^N+x^{N-1}+\cdots+x^2+x-a$.

1. Montrer que l'équation $f_N(x)=0$ possède une unique solution strictement positive x_N. Montrer que lorsque $N>a$, on a $x_N \in]0,1[$.
2. Montrer la relation :
$$(x-1)f_N(x)=x^{N+1}-(a+1)x+a$$
3. Montrer que $f_{N+1}(x_N)>f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante. Montrer que x_N converge vers un nombre x^* appartenant à $[0,1[$, quand N tend vers $+\infty$.
4. Soit A un entier naturel non nul tel que $A \leqslant N$. Montrer que $0<x_N^N \leqslant x_A^N$.
En choisissant $A \geqslant a$, en déduire la limite de x_N^N lorsque N tend vers $+\infty$ puis, à l'aide de la question 2), exprimer x^* en fonction de a.
On convient alors de poser $x_N=\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
5. Établir à l'aide de la relation de la question 2) l'égalité suivante :
$$(N+1)\varepsilon_N\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)+\ln(1+\varepsilon_N)\right]=\varepsilon_N\ln\varepsilon_N+\varepsilon_N\ln a$$
En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1+\varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$.