7 février 2024

Devoir surveillé n°3

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Problème 1

Le but de ce problème est de calculer les puissances $n^{ième}$ d'une certaine matrice et d'appliquer ce calcul à un problème de probabilité.

Partie 1

On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{12}A$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} en passant par le calcul de la réduite de Gauss.

   Si vous n'y arrivez pas, vous pourrez admettre que
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$.
2. En déduire une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n.
5. Calculer B puis exprimer B^n en fonction de A^n.
6. En déduire l'expression de B^n en fonction de n.

Partie 2

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :
T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches ;
M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film, une émission ;
S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.
Il estime que
(i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;
(ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
(iii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la science optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
Au départ, le volume des ventes de ce commerçant se compose d'une part $p_0 = \frac{45}{100}$ de jouets de la catégorie T, d'une part $q_0 = \frac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M et d'une part $r_0 = \frac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S.

On note :
T_n l'événement "le client achète un jouet de la catégorie T pour le Noël de l'année n."
M_n l'événement "le client achète un jouet de la catégorie M pour le Noël de l'année n."
S_n l'événement "le client achète un jouet de la catégorie S pour le Noël de l'année n."
On désigne par p_n, q_n, r_n, les probabilités respectives des événements T_n, M_n, S_n dans les ventes du distributeur le n-ième Noël suivant.

1. Justifier que (T_n, M_n, S_n) forme un système complet d'évènements.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$.
3. De même exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, q_{n+1} et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
   (B étant la matrice définie dans la partie 1).
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
6. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (p_n, q_n, r_n) en fonction de n.
7. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente ?

Solution. **Partie 1**

1. Montrons que P est inversible en calculant sa réduite de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

on a obtenue une matrice triangulaire supérieure avec aucun coefficient nul sur la diagonale, donc Pest inv

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow 1/2L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 11 & 0 & 4 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4/11 & 8/22 & 8/22 \\ 0 & 1 & 0 & 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow 1/11L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 0 & 1 & 0 & 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 1/4L_1$$

D'où :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.}$$

2. En effectuant le produit des trois matrices, on trouve que $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } D = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.}$$

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : A^n = PD^nP^{-1}$.
Initialisation :
On a $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, donc $A^0 = PD^0P^{-1}$.
Et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
On a montré précédemment que $D = P^{-1}AP$, d'où $A = PDP^{-1}$ (**attention à l'ordre des matrices !**) et donc on peut écrire

$$A^{n+1} = A^nA \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

D'où, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
par le principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Soit $n \geq 0$.
Comme D est une matrice diagonale, on en déduit que $D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

Et donc $A^n = P \begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Après calcul, on trouve : $A^n = \begin{pmatrix} 3 \times \dfrac{12^n}{11} + \dfrac{8}{11} & 3 \times \dfrac{12^n}{11} - \dfrac{3}{11} & 3 \times \dfrac{12^n}{11} - \dfrac{3}{11} \\ 4 \times \dfrac{12^n}{11} - \dfrac{4}{11} & 4 \times \dfrac{12^n}{11} + \dfrac{3}{22} + \dfrac{(-3)^n}{2} & 4 \times \dfrac{12^n}{11} + \dfrac{3}{22} + \dfrac{(-3)^{n+1}}{2} \\ 4 \times \dfrac{12^n}{11} - \dfrac{4}{11} & 4 \times \dfrac{12^n}{11} + \dfrac{3}{22} + \dfrac{(-3)^{n+1}}{2} & 4 \times \dfrac{12^n}{11} + \dfrac{3}{22} + \dfrac{(-3)^n}{2} \end{pmatrix}$

5. On a $B = \frac{1}{12}A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

   D'où, $\forall n \geq 0$, $B^n = (\frac{1}{12})^n A^n$.

6. Soit $n \geq 0$.

   D'où $A^n = (\frac{1}{12})^n \begin{pmatrix} 3 \times \frac{12^n}{11} + \frac{8}{11} & 3 \times \frac{12^n}{11} - \frac{3}{11} & 3 \times \frac{12^n}{11} - \frac{3}{11} \\ 4 \times \frac{12^n}{11} - \frac{4}{11} & 4 \times \frac{12^n}{11} + \frac{3}{22} + \frac{(-3)^n}{2} & 4 \times \frac{12^n}{11} + \frac{3}{22} + \frac{(-3)^{n+1}}{2} \\ 4 \times \frac{12^n}{11} - \frac{4}{11} & 4 \times \frac{12^n}{11} + \frac{3}{22} + \frac{(-3)^{n+1}}{2} & 4 \times \frac{12^n}{11} + \frac{3}{22} + \frac{(-3)^n}{2} \end{pmatrix}$.

   Conclusion :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} + \frac{8}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n & \frac{3}{11} - \frac{3}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n & \frac{3}{11} - \frac{3}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{1}{2}.\left(\frac{-1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n - \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n - \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}}$$

Partie 2

1. L'ensemble $\{T_n, M_n, S_n\}$ forme un système complet d'évènements car T_n, M_n, S_n sont trois évènements incompatibles deux à deux et leur réunion décrit bien l'univers des possibles correspondant à la situation décrite dans l'énoncé.

2. D'après la formule des probabilités totales appliquées à ce sce tous de probas non nulles, on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(T_{n+1}) \\ &= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(M_n \cap T_{n+1}) + P(S_n \cap T_{n+1}) \\ &= P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(M_n) \times P_{M_n}(T_{n+1}) + P(S_n) \times P_{S_n}(T_{n+1}) \end{aligned}$$

   Avec les données de l'énoncé, on en déduit alors que :

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n.}$$

3. De même on a en utilisant le s.c.e. $\{T_n, M_n, S_n\}$ et la formule des probabilités totales, on obtient :

$$q_{n+1} = p_n \times P_{T_n}(M_{n+1}) + q_n \times P_{M_n}(M_{n+1}) + r_n \times P_{S_n}(M_{n+1}).$$

$$\boxed{q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n.}$$

   et

$$\boxed{r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n.}$$

4. On vérifie facilement par calcul direct que : $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

5. Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.

Initialisation :
$B^0\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire que :
$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que :
$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B^{n+1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
On a :
$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B.B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$ (par hypothèse de récurrence) $= B^{n+1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :

par le principe de récurrence on en déduit que $\forall n \geq 0$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.

6. Soit $n \geq 0$,

$$B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} .= \begin{pmatrix} \frac{3}{11} + \frac{8}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n & \frac{3}{11} - \frac{3}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n & \frac{3}{11} - \frac{3}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{1}{2}.\left(\frac{-1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n - \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n - \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

Après calcul, on obtient que :
$p_n = \left[\frac{3}{11} + \frac{8}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n\right] p_0 + \left[\frac{3}{11} - \frac{3}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n\right] q_0 + \left[\frac{3}{11} - \frac{3}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n\right] r_0$.
$q_n = \left[\frac{4}{11} - \frac{4}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n\right] p_0 + \left[\frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{1}{2}.\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right] q_0 + \left[\frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n - \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] r_0$.
$r_n = \left[\frac{4}{11} - \frac{4}{11}.\left(\frac{1}{12}\right)^n\right] p_0 + \left[\frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n - \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] q_0 + \left[\frac{4}{11} + \frac{3}{22}.\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] r_0$.

7. Cherchons les limites en $+\infty$ des suites (p_n, q_n, r_n).
Sachant que $\left(\frac{1}{12}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ainsi que $\left(\frac{-1}{4}\right)^n$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (suites géométriques de raison comprise strictement entre -1 et 1), on en déduit que :

$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{11}(p_0 + q_0 + r_0) = \frac{3}{11}$.

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{4}{11}(p_0+q_0+r_0) = \frac{4}{11}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{4}{11}(p_0+q_0+r_0) = \frac{4}{11}.$$

D'où les parts à long terme des trois catégories de jouets dans la vente sont :

$$\boxed{\text{pour } T : \frac{3}{11}, \text{ pour } M : \frac{4}{11} \text{ et pour } S : \frac{4}{11}.}$$

$\square$

Problème 2 **EML**

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x - \ln\left(1+x^2\right)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \simeq 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   Si vous n'arrivez pas à le montrer, vous pourrez admettre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en O.
4. Ecrire un programme Python permettant de tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f, sa tangente en 0 : on précisera une couleur différente au choix pour les courbes, le titre du graphique et une légende éventuelle.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Écrire un programme Python permettant de créer une liste contenant les n premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est minorée par 0.
4. Établir que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
5. Écrire un programme Python qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
6. (a) Établir : $\forall x \in [0,1] : f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$.
      i. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

ii. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $2u_0$.

iii. En déduire que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(d) Écrire un programme Python permettant de calculer w_n pour un entier n donné par l'utilisateur.

Solution. **Partie I : Etude et tracé de $\mathcal{C}$**

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x^2>0$ et $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \boxed{\frac{(x-1)^2}{1+x^2} > 0}$$

(b) Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

2. **En** $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.
De plus par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$.
D'où par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = -\infty$.
D'où par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \ln(x^2+1)) = \boxed{-\infty}$.

En $+\infty$: *Le calcul de cette limite n'était pas facile*

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln\left(1+x^2\right) \\ &= x\left[1 - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\right] \\ &= x\left[1 - \frac{\ln\left(x^2\left(1+1/x^2\right)\right)}{x}\right] \\ &= x\left[1 - 2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln\left(1+1/x^2\right)}{x}\right] \end{aligned}$$

Or,
$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+1/x^2\right)}{x} = 0$ (car on a une limite de la forme "$\dfrac{0}{+\infty}$").
D'où, par somme et produit, on en déduit que,
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1 - 2\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln\left(1+1/x^2\right)}{x}\right] = \boxed{+\infty}$,

3. Equation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 :
$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \boxed{x}$.

4.
```
def f(x):
   y=x-np.log(1+x**2)
   return y

def g(x):
   z=x
   return z

x=np.arrange(-10, 10.01, 0.01)
```

```
plt.plot(x,f(x),'b', label='Courbe de f')
plt.plot(x,g(x), 'm', label='Equation de la tangente en 0')
plt.title('Courbe représentative de f et de sa tangente en 0')
plt.legend()
plt.show()
```

Partie II : Etude d'une suite et d'une série associée à f

1. ```
   def f(x):
       y=x-np.log(1+x**2)
       return y

   n=int(input("Nombre de termes à calculer?')
   u=1
   L=[u]
   for i in range(1,n+1):
       u=f(u)
       L.append(u)
   print(L)
   ```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (u_n - \ln(u_n^2 + 1)) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$.
   Or, $-\ln\left(1 + u_n^2\right) \leq 0$, car $1 + u_n^2 \geq 1$.
   D'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$, c'est à dire $u_{n+1} \leq u_n$.

   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

   Remarque : comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, vous pouviez aussi démontrer le résultat par récurrence de manière classique.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geq 0$
   Initialisation : $u_0 = 1 \geq 0$.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $u_n \geq 0$.
   Et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1} \geq 0$.
   On a :

	$u_n \geq 0$	*par H.R*
donc	$f(u_n) \geq f(0)$	*car f croissante sur* $\mathbb{R}$
donc	$u_{n+1} \geq 0$	

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : par le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0}$

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
   Par le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$.
   Par ailleurs,
   — $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$
   — f est continue sur $\mathbb{R}$
   — (u_n) converge vers une limite ℓ.
   D'où, par le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite vérifie $f(\ell) = \ell$.
   Or $f(\ell) = \ell \iff \ln\left(1 + \ell^2\right) = 0 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.

   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$
   ```

5.

```
u=1
n=0
while u >= 10**(-3):
    u=f(u)  #en reprenant la fonction f définie au dessus
    n=n+1
print(n)
```

6. (a) On définit sur $[0,1]$ la fonction g par $g(x) = f(x) - x + \frac{1}{2}x^2$.
   Etudions son signe.
   g est dérivable sur $[0,1]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1],\ g'(x) = -\frac{2x}{1+x^2} + x = \boxed{\frac{x\left(x^2-1\right)}{x^2+1}} < 0.$$

   D'où le tableau de variation suivant :

x	0		1
$g'(x)$	0	$-$	0
g	0	$\searrow$	

   g admet donc un maximum sur $[0,1]$ atteint en 0 et qui vaut 0.
   D'où, $\forall x \in [0,1],\ g(x) \leq 0$.
   Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0,1] : f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On va appliquer cette inégalité à u_n, mais il faut au préalable vérifier que $u_n \in [0,1]$.
   Comme $u_0 = 1$ et que la suite est décroissante minorée par 0, on a bien que $u_n \in [0,1]$.
   Donc $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2$.
   Ce qui équivaut à $\frac{1}{2}u_n^2 \leq u_n - u_{n+1}$.
   Ou encore à $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n^2 \leq 2\left(u_n - u_{n+1}\right).}$

   (c) i. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k^2 - \sum_{k=0}^{n} u_k^2 = u_{n+1}^2 \geq 0,$$

   en utilisant la relation de Chasles pour simplifier les sommes.
   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est croissante}}$.

   ii. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \leq \sum_{k=0}^{n} 2(u_k - u_{k+1}) = 2\left(\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}\right) = 2(u_0 - u_{n+1})$$

   par télescopage.
   Or $u_{n+1} \geq 0$.
   Donc $u_0 - u_{n+1} \leq u_0$.
   Donc $2(u_0 - u_{n+1}) \leq 2u_0$.
   D'où, $w_n \leq 2u_0$.
   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est majorée par } 2u_0.}$

   iii. La suite (w_n) est croissante et majorée par $2u_0$.
   $\boxed{\text{D'après le théorème de convergence monotone, elle converge.}}$

7.

```
n=int(input('Rentrer une valeur pour n: '))
u=1
S=u
for k in range(1,n+1):
```

```
    u=f(u)
    S=S+u**2
print(S)
```

□

Problème 3

On considère, pour tout entier n non nul, la fonction polynomiale f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (1+2x)^n - 2^n x^n$

1. (a) Donner les formes développées des fonctions f_1, f_2, f_3. Dans chacun des cas, déterminer leurs racines.
   (b) Développer la fonction f_4. Vérifier que f_4 s'annule en $-\frac{1}{4}$, puis en déduire les racines de f_4
2. (a) Donner la forme développée de la fonction f_n
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de degré $n-1$ et déterminer son coefficient dominant.
3. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la dérivée de f_n est donnée par : $f_n'(x) = 2nf_{n-1}(x)$
   (b) Calculer, en fonction de la parité de n, $f_n\left(-\frac{1}{4}\right)$
   (c) Déduire des deux questions précédentes, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, «la fonction f_{2n} admet comme unique racine $-\frac{1}{4}$ et la fonction f_{2n+1} n'admet aucune racine»

Solution. 1. (a) En remplaçant n par 1, puis 2, puis 3, on trouve que :

$f_1(x) = (1+2x)^1 - 2^1x^1 = 1 + 2x - 2x = \boxed{1}$
et
$f_2(x) = (1+2x)^2 - 2^2x^2 = 1 + 4x + 4x^2 - 4x^2 = \boxed{1+4x}$
et
$f_3(x) = (1+2x)^3 - 2^3x^3 = 1 + 3\times 2x + 3\times(2x)^2 + (2x)^3 - 8x^3 = \boxed{1+6x+12x^2}$
On en déduit alors que f_1 n'admet pas de racines, que f_2 admet pour unique racine $-\frac{1}{4}$ et que f_3 n'admet pas de racines car $\Delta = 6^2 - 4\times 1\times 12 = -12 < 0$.

(b) En utilisant la formule du binôme de Newton, on en déduit que :

$f_4(x) = (1+2x)^4 - 2^4x^4 = 1 + 4\times 2x + 6\times(2x)^2 + 4(2x)^3 + (2x)^4 - 16x^4 = 1 + 8x + 24x^2 + 32x^3$,
car $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$) (en utilisant la définition du coefficient binomial avec les factorielles ou en utilisant le triangle de Pascal).
Par ailleurs, en utilisant la définition de f_4, on trouve que $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(1+2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\right)^4 - 2^4\left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{2^4}{4^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0$.
D'où $-\frac{1}{4}$ est une racine de f_4 et donc $x+\frac{1}{4}$ divise $f_4(x)$.
D'où il existe un polynôme de degré 2 tel que $f_4(x) = \left(x+\frac{1}{4}\right)Q(x)$.
Posons $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels.

Alors $\left(x+\frac{1}{4}\right)Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{1}{4}ax^2 + \frac{1}{4}bx + \frac{1}{4}c = ax^3 + \left(b+\frac{1}{4}a\right)x^2 + \left(c+\frac{1}{4}b\right)x + \frac{1}{4}c$
Ensuite en procédant par identification des coefficients (à faire), on en déduit que :

$a = 32 \quad b+\frac{1}{4}a = 24 \quad c+\frac{1}{4}b = 8 \quad \frac{1}{4}c = 1 \quad .$

Et donc $a=32 \quad b=16 \quad c=4$.
Ainsi, $Q(x)=32x^2+16x+4$.
Or, le discriminant de Q vaut $\Delta=16^2-4\times 32\times 4=16^2(1-2)=-16^2<0$, d'où Q n'a pas de racine.
$\boxed{\text{En conclusion, la seule racine de } Q \text{ est } -\frac{1}{4}}$.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.
D'après la définition de f_n, on a $f_n(x)=(1+2x)^n-2^nx^n$.

Or, d'après la formule du binôme de Newton, il vient :

$$\begin{aligned}(1+2x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(2x)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^kx^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^kx^k+\binom{n}{n}2^nx^n \quad \text{en utilisant la formule du binome de Newton}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^kx^k+2^nx^n\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}f_n(x) &= (1+2x)^n-2^nx^n\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^kx^k+2^nx^n-2^nx^n\\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^kx^k}\end{aligned}$$

(b) On a $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^kx^k=\binom{n}{n-1}2^{n-1}x^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}2^kx^k=n2^kx^k+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}2^kx^k$.

$\boxed{\text{D'où le degré de } f_n \text{ est } n-1 \text{ et son terme dominant est } n2^{n-1}}$.

3. (a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x\in\mathbb{R},\ f_n'(x)=n\times 2\times(1+2x)^{n-1}-2^n\times n\times x^{n-1}=2n\left[(1+2x)^{n-1}-2^{n-1}x^{n-1}\right]=\boxed{2nf_{n-1}(x)}$.

(b) On a $f_n\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(1+2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\right)^n-2^n\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{2}{4}\right)^n$.
Donc $f_n\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2^n}-\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{1-(-1)^n}{2^n}$.
Ainsi, on en déduit que si n est pair alors $(-1)^n=1$ et donc $f_n\left(-\frac{1}{4}\right)=0$.
Et si n est impair alors $(-1)^n=-1$ et donc $\boxed{f_n\left(-\frac{1}{4}\right)=2\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.}$

(c) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction f_{2n} admet comme unique racine $-\frac{1}{4}$ et la fonction f_{2n+1} n'admet aucune racine.
Pour $n\in\mathbb{N}$), on pose :
$P(n)$: f_{2n} admet comme unique racine $-\frac{1}{4}$ et f_{2n+1} n'admet aucune racine.
Initialisation :
Pour $n=1$, il s'agit de montrer que f_2 admet comme unique racine $-\frac{1}{4}$ et f_3 n'admet aucune racine, ce qui est le cas comme vu plus haut.

Hérédité :
Soit $n \geqslant 1$ fixé.
Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est à dire que f_{2n} admet comme unique racine $-\frac{1}{4}$ et f_{2n+1} n'admet aucune racine.
D'après 3.a), $f'_{2n+2}(x) = 2(2n+2)f_{2n+1}(x)$.
Or par hypothèse de récurrence f_{2n+1} n'admet aucune racine et d'après la question précédente $f_{2n+1}\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$.
De plus f_{2n+1} est continue, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f_{2n+1}(x) > 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'_{2n+2}(x) > 0$ et de fait f_{2n+2} est strictement croissante.
Or d'après 3.b) $f_{2n+2}\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty, -\frac{1}{4}[, f_{2n+2}(x) < 0$ et $\forall x \in]-\frac{1}{4}, +\infty[, f_{2n+2}(x) > 0$

On en déduit que $-\frac{1}{4}$ est l'unique racine de f_{2n+2}
De plus, $f'_{2n+3}(x) = 2(2n+3)f_{2n+2}(x)$.
Donc f'_{2n+3} est de même signe que f_{2n+2}.
D'où, f_{2n+3} est décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{4}[$ et croissante sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$.
Or d'après 3.b) $f_{2n+3}\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{2n+3}(x) > 0$ et donc f_{2n+3} n'admet pas de racine.
D'où $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion :

Par le principe de récurrence, on en déduit que f_{2n} admet comme unique racine $-\frac{1}{4}$ et f_{2n+1} n'admet

□

Problème 4

Les parties I et II sont indépendantes, la partie III utilise les résultats de la partie II et les notations de la partie I.

Partie I : étude d'une suite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Vérifier que la suite (H_n) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   (c) Justifier que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite (finie ou infinie).
   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
   (e) Écrire un programme Python permettant de calculer H_n, n étant donné par l'utilisateur.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = H_n - \ln(n+1)$ et $v_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) Justifier que pour tout $x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
   (c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant1}$ et $(v_n)_{n\geqslant1}$ sont adjacentes.
   En déduire qu'elle convergent vers une même limite que l'on notera γ.

Partie II : formule d'inversion de Pascal

1. Soient i, k et n trois entiers naturels tels que $i \leqslant k \leqslant n$.
   Prouver que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-i \\ n-k \end{pmatrix}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u_k$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u_i\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\binom{n-i}{j}$$

(b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k$.

Cela montre que l'on peut retrouver la suite (u_n) à partir de la suite (v_n) et s'appelle la formule d'inversion de Pascal.

Partie III : une application

1. Justifier que, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1-(1-x)^n}{x}=\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}, f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(-1)^k}{k}x^k$.

   (a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R},\ f_n'(x)=-\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$.

   (b) En admettant que, pour tout $x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(1-x)^{k+1}}{k+1}-H_n$, conclure que $H_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3. En utilisant la formule d'inversion de Pascal, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}H_k$

Solution. **Partie I : étude d'une suite**

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$H_{n+1}-H_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}\geqslant 0$$

Ainsi, la suite (H_n) est croissante.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$H_{2n}-H_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $k\in[n+1,2n]$.

On a :

$$\begin{array}{ll} & n+1\leq k\leq 2n \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2n}\leq\dfrac{1}{k}\leq\dfrac{1}{n+1}\quad \text{car la fonction } x\mapsto 1/x \text{ est strict. décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{donc} & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}\leq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \\ \text{donc} & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}\leq H_{2n}-H_n \end{array}$$

Or, $\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}1=\dfrac{1}{2n}(2n-(n+1)+1)=\dfrac{1}{2n}\times n=\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

(c) La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante, soit elle est majorée et converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, soit elle est non majorée et diverge vers $+\infty$.

(d) Raisonnons par l'absurde et supposons que (H_n) converge.
Alors, en notant ℓ sa limite et en passant à la limite, on en déduit que $H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
Ainsi en passant à la limite dans l'inégalité de la question 1.(b), on obtient

$$0 \geqslant \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde.

$\boxed{\text{Conclusion : } \lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty.}$

2. (a) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.
La fonction $x \mapsto 1+x$ est définie sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'où, par composition, $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x > -1,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$$

du signe de x car $x > -1$ donc $x+1 > 0$.

On en déduit alors que f est strictement décroissante sur $]-1,0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ (faire le tableau de variation si besoin pour mieux voir les choses).
Ainsi, f admet sur $]-1;+\infty[$ un minimum atteint en 0 qui vaut $f(0) = 0$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'une part, comme $\frac{1}{n+1} \in \Big] -1,+\infty[$, on a, d'après la question précédente :

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'autre part, comme $-\frac{1}{n+1} \in \Big] -1,+\infty[$, on a, d'après la question précédente :

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

Donc

$$-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or $-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

D'où

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

En combinant les deux inégalités, on en déduit que $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \geqslant 0$ d'après l'inégalité précédente.

Donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Par ailleurs : $v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant 0$ d'après l'inégalité précédente.

Donc la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

Enfin : $v_n - u_n = H_n - \ln(n) - H_n + \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{n} + 1) = 1$.

Donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 0$.

Conclusion : les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et donc elles convergent vers une même limite.

Partie II : formule d'inversion de Pascal

1. Soient i, k et n trois entiers naturels tels que $i \leqslant k \leqslant n$.

   On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{k}{i} &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!}{(k-i)!i!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-i)!i!} \\
&= \frac{n!(n-i)!}{(n-i)!(n-k)!(k-i)!i!} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n-i)!}{(n-k)!((n-i)-(n-k))!} \\
&= \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{i}{k}u_i \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{i}{k}u_i \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}(-1)^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}u_i \text{ d'après la question précédente} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}u_i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u_i\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-i}{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u_i\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{j}\binom{n-i}{j} \text{ en posant } j=n-k
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la formule du binôme de Newton, $\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j \begin{pmatrix} n-i \\ j \end{pmatrix} = (1-1)^{n-i} = 0^{n-i}$.

Or $0^{n-i} = 0$ pour $i \neq n$ et 1 sinon.

D'où :

$$\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j \begin{pmatrix} n-i \\ j \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \text{ si } n > i \\ 1 \text{ si } n = i \end{cases}$$

Autrement dit, dans la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} u_i \sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j \begin{pmatrix} n-i \\ j \end{pmatrix}$, tous les termes sont nuls, sauf celui obtenu pour $i = n$ qui vaut $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} u_n 0^0 = u_n$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} v_k}$.

Partie III : une application

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1 - x \neq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = \frac{1-(1-x)^n}{x}$$

2. (a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k x^{k-1}$$

Si $x = 0$ alors $f_n'(0) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^1 0^0 = -n$ (donc la formule demandée est vraie pour $x = 0$).

Sinon :

$$f_n'(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-x)^k = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-x)^k - 1\right)$$

Donc d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{x}\left((1-x)^n - 1\right) = -\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k \text{ d'après la question précédente}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k.}$

(b) D'après la relation de la question précédente, $f_n(1) = 0 - H_n$.

Donc en utilisant la définition de f_n et ce qui est admis dans la question, on en déduit que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3. On reprend les notations de la q.2.

On pose donc $u_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, H_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u_k$
(formule valable en posant $H_0 = 0$).
Et d'après la formule d'inversion de Pascal, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k$$

Autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k$$

Donc en multipliant par $(-1)^{n+1}$,

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2n+1-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k.$$

Enfin $(-1)^{2n+1-k} = (-1)^{2n+1}(-1)^{-k} = -(-1)^k = (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k$.

$\square$