7 février 2024

Devoir surveillé n°3

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Problème 1

Le but de ce problème est de calculer les puissances $n^{ième}$ d'une certaine matrice et d'appliquer ce calcul à un problème de probabilité.

Partie 1

On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{12}A$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} en passant par le calcul de la réduite de Gauss.

   Si vous n'y arrivez pas, vous pourrez admettre que
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$.
2. En déduire une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0,\ A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n.
5. Calculer B puis exprimer B^n en fonction de A^n.
6. En déduire l'expression de B^n en fonction de n.

Partie 2

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :
T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches ;
M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film, une émission ;
S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.
Il estime que
(i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;
(ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
(iii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la science optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
Au départ, le volume des ventes de ce commerçant se compose d'une part $p_0 = \frac{45}{100}$ de jouets de la catégorie T, d'une part $q_0 = \frac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M et d'une part $r_0 = \frac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S.

On note :
T_n l'événement "le client achète un jouet de la catégorie T pour le Noël de l'année n."
M_n l'événement "le client achète un jouet de la catégorie M pour le Noël de l'année n."
S_n l'événement "le client achète un jouet de la catégorie S pour le Noël de l'année n."
On désigne par p_n, q_n, r_n, les probabilités respectives des événements T_n, M_n, S_n dans les ventes du distributeur le n-ième Noël suivant.

1. Justifier que (T_n, M_n, S_n) forme un système complet d'évènements.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$.
3. De même exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, q_{n+1} et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
   (B étant la matrice définie dans la partie 1).
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
6. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (p_n, q_n, r_n) en fonction de n.
7. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente ?

Problème 2 EML

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \simeq 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. (a) Calculer la dérivée de f.

(b) En déduire le sens de variation de f.

2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
Si vous n'arrivez pas à le montrer, vous pourrez admettre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en O.

4. Ecrire un programme Python permettant de tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f, sa tangente en 0 : on précisera une couleur différente au choix pour les courbes, le titre du graphique et une légende éventuelle.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Écrire un programme Python permettant de créer une liste contenant les n premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par 0.
4. Établir que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
5. Écrire un programme Python qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
6. (a) Établir : $\forall x \in [0,1] : f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$.

   i. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

   ii. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $2u_0$.

   iii. En déduire que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

   (d) Écrire un programme Python permettant de calculer w_n pour un entier n donné par l'utilisateur.

Problème 3

On considère, pour tout entier n non nul, la fonction polynomiale f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (1+2x)^n - 2^n x^n$

1. (a) Donner les formes développées des fonctions f_1, f_2, f_3. Dans chacun des cas, déterminer leurs racines.

   (b) Développer la fonction f_4. Vérifier que f_4 s'annule en $-\frac{1}{4}$, puis en déduire les racines de f_4

2. (a) Donner la forme développée de la fonction f_n

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de degré $n-1$ et déterminer son coefficient dominant.

3. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la dérivée de f_n est donnée par : $f_n'(x) = 2nf_{n-1}(x)$

   (b) Calculer, en fonction de la parité de n, $f_n\left(-\frac{1}{4}\right)$

   (c) Déduire des deux questions précédentes, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, «la fonction f_{2n} admet comme unique racine $-\frac{1}{4}$ et la fonction f_{2n+1} n'admet aucune racine»

Problème 4

Les parties I et II sont indépendantes, la partie III utilise les résultats de la partie II et les notations de la partie I.

Partie I : étude d'une suite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Vérifier que la suite (H_n) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   (c) Justifier que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite (finie ou infinie).
   (d) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
   (e) Écrire un programme Python permettant de calculer H_n, n étant donné par l'utilisateur.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = H_n - \ln(n+1)$ et $v_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) Justifier que pour tout $x \in]-1, +\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
   (c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   En déduire qu'elle convergent vers une même limite que l'on notera γ.

Partie II : formule d'inversion de Pascal

1. Soient i, k et n trois entiers naturels tels que $i \leqslant k \leqslant n$.
   Prouver que $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_i \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j}$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$.
   Cela montre que l'on peut retrouver la suite (u_n) à partir de la suite (v_n) et s'appelle la formule d'inversion de Pascal.

Partie III : une application

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1-(1-x)^n}{x} = \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} x^k$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \ f_n'(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k$.

(b) En admettant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} - H_n$, en déduire que

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

3. En utilisant la formule d'inversion de Pascal, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} H_k$.