16 décembre 2023

Correction Devoir surveillé n°2

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Exercice 1

On dispose de trois pièces A, B et C. La pièce A est honnête, c'est à dire que lorsqu'on la lance elle tombe sur "pile" avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur "face" avec la probabilité $\frac{1}{2}$. En revanche les pièces B et C sont truquées : la pièce B comporte deux côtés "face" et la pièce C comporte deux côtés "pile".

On choisit au hasard une des trois pièces au début du processus puis on fait les lancers successifs avec cette même pièce.

On note, pour tout entier naturel i non nul, P_i l'événement " obtenir pile lors du i-ème lancer."

1. Quelle est la probabilité de l'événement P_1.
2. Faire un arbre représentant les deux premiers lancers. Calculer la probabilité de l'événement P_2.
3. (a) Calculer la probabilité que les deux premiers lancers amènent "pile".
   (b) Les deux premiers lancers amènent "pile". Quelle est la probabilité que l'on ait choisi la pièce C au début du processus ?
   (c) Si on obtient deux fois "pile" de suite, on décide de mettre la pièce que l'on a tiré de côté. Quelle est la probabilité que l'on mette la pièce C de côté ?
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la probabilité que les n premiers lancers amènent "pile" est : $\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right]$.
   Indication : formule des probas totales car la probabilité que les n premiers lancers amènent "pile" dépend de si on utilise la pièce A ou B ou C.

(b) Donner, en fonction de n, l'expression de la probabilité p_n que l'on ait choisi la pièce C sachant que les n premiers lancers amènent "pile".

Solution. 1. L'événement P_1 signifie " obtenir pile lors du premier lancer."
$\{A, B, C\}$ forme un s.c.e. de probabilité non nulles.
En appliquant la formule des probabilités totales à ce sce, il vient :

$$\begin{aligned} P(P_1) &= P(A\cap P_1)+P(B\cap P_1)+P(C\cap P_1) \\ &= P(A).P_A(P_1)+P(B).P_B(P_1)+P(C).P_C(P_1) \\ &= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.0+\frac{1}{3}.1 \\ &= \boxed{\frac{1}{2}.} \end{aligned}$$

2. L'événement P_2 signifie " obtenir pile lors du 2-ème lancer."

On a que $\{A\cap P_1, A\cap \overline{P_1}, B\cap \overline{P_1}, C\cap P_1\}$ forme un sce de probabilités non nulles.

Remarque : je n'inclus pas les évènements $B\cap P_1$ et $C\cap \overline{P_1}$ dans le sce car ils sont impossibles (en effet avec la pièce B on ne peut pas obtenir de pile et avec la pièce C on ne peut pas obtenir face).
J'aurais pu les inclure dans le sce, mais à ce moment là je n'aurai pas pu écrire la deuxième partie de la formule des probas totales sans avoir remplacé avant dans la première formulation la proba de ces évènements par 0, autrement j'aurais conditionné par des évènements de probas nulles ce qui est impossible, ce qui n'est pas rigoureux.
En appliquant la formule des probas totales appliquées au sce cité ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} P(P_2) &= P(A\cap P_1\cap P_2)+P(A\cap \overline{P_1}\cap P_2)+P(B\cap \overline{P_1}\cap P_2)+P(C\cap P_1\cap P_2) \\ &= P(A).P_A(P_1).P_{A\cap P_1}(P_2)+P(A).P_A(\overline{P_1}).P_{A\cap\overline{P_1}}(P_2)+P(B).P_B(\overline{P_1}).P_{B\cap\overline{P_1}}(P_2)+P(C).P_C(P_1 \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1\times 0+\frac{1}{3}\times 1\times 1 \\ &= \boxed{\frac{1}{2}.} \end{aligned}$$

3. (a) Calculons la probabilité que les deux premiers lancers amènent "pile".
Il s'agit donc de calculer $P(P_1\cap P_2)$.

$\{A, B, C\}$ forme un s.c.e. de probabilité non nulles.
Donc en appliquant la formule des probabilités totales à ce sce, il vient :

$$\begin{aligned} P(P_1\cap P_2) &= P(A\cap P_1\cap P_2)+P(B\cap P_1\cap P_2)+P(C\cap P_1\cap P_2) \\ &= P(A).P_A(P_1\cap P_2)+P(B).P_B(P_1\cap P_2)+P(C).P_C(P_1\cap P_2) \\ &= P(A).P_A(P_1\cap P_2)+0+P(C).P_C(P_1\cap P_2) \\ &\quad \textit{car avec la pièce B on ne peut pas obtenir pile} \\ &= P(A).P_A(P_1).P_A(P_2)+P(C).P_C(P_1).P_C(P_2) \\ &\quad \textit{car une fois la pièce choisie les lancers sont indépendants} \\ &= \frac{1}{3}.(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3}.(1)^2 \\ &= \boxed{\frac{5}{12}.} \end{aligned}$$

(b) Les deux premiers lancers amènent "pile". On nous demande quelle est la probabilité que l'on ait choisi la pièce C au début du processus ? Il s'agit donc de calculer $P_{P_1\cap P_2}(C)$.
On va donc utiliser la formule de Bayes avec $P(C)\neq 0$ et $P(P_1\cap P_2)\neq 0$:

$$\begin{aligned}
P_{P_1\cap P_2}(C) &= \frac{P(P_1\cap P_2\cap C)}{P(P_1\cap P_2)}\\
&= \frac{P(C).P_C(P_1\cap P_2)}{P(P_1\cap P_2)}\\
&= \frac{P(C).P_C(P_1).P_C(P_2)}{P(P_1\cap P_2)}\\
&= \frac{\frac{1}{3}\times 1\times 1}{\frac{5}{12}}\\
&= \boxed{\frac{4}{5}}.
\end{aligned}$$

(c) On cherche la probabilité d'avoir eu deux piles (pour mettre la pièce de côté) et que ce soit avec la pièce C (pour que ce soit la pièce C que l'on mette de côté et non une autre), c'est à dire on cherche $P(P_1\cap P_2\cap C)$
Or on a d'après la formule des probas composées avec $P(P_1\cap P_2)\neq 0$ et en utilisant la q.3)a) et 3)b) :

$$P(P(P_1\cap P_2\cap C)) = P(P_1\cap P_2)P_{P_1\cap P_2}(C) = \frac{5}{12}\frac{4}{5} = \frac{1}{3}.$$

4. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On nous demande de calculer $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right)$.
Donc toujours en utilisant le s.c.e. $\{A,B,C\}$ de probabilités non nulles et la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) &= P\left(A\cap\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) + P\left(B\cap\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) + P\left(C\cap\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right)\\
&= P\left(A\right).P_A\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) + P\left(B\right).P_B\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) + P\left(C\right).P_C\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right)
\end{aligned}$$

Comme les lancers successifs sont indépendants sachant le dé choisi, on obtient :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}.1^n = \boxed{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right]}.$$

(b) On cherche $P_D(C)$ où $D = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$.
D'après la formule de Bayes avec $P(D)\neq 0$ et $P(C)\neq 0$:

$$\begin{aligned}
p_n &= P_D(C)\\
&= \frac{P(C\cap D)}{P(D}\\
&= \frac{P(C)P_C(D)}{P(D)}\\
&= \frac{\frac{1}{3}.1^n}{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right]}
\end{aligned}$$

cf. q)4)a) et car la pièce C donne que des piles

$$= \boxed{\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right]}}.$$

□

Problème 1 **Polynôme et étude de fonction**

On donne les approximations suivantes, qui vous serviront au cours de l'exercice :
$\ln(2) \approx 0,69$ $\quad \ln(3) \approx 1,10$ $\quad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25$ $\quad 22\ln(3) - 23 \approx 1,17$
$\dfrac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80$ $\quad \dfrac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86.$

Préliminaire : un polynôme et une étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$

1. Factoriser P par la méthode de votre choix.
2. En calculant, pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\dfrac{2P(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$ de deux manière différente, justifier qu'on a l'égalité :
$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x} = \frac{2(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x - 3)}{\mathrm{e}^x}.$$
3. Déduire des questions précédentes le signe de $2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, en dressant proprement le tableau de signe.

Etude d'une fonction

On pose $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22x + 12\mathrm{e}^{-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.
Le but de cette partie est l'étude de la fonction h.

1. Etude de v
   (a) Écrire un programme Python pour définir la fonction v et la représenter sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) Calculer les valeurs exactes de $v(\ln(2))$ et de $v(\ln(3))$ en détaillant vos calculs.
   (c) A l'aide des résultats préliminaires, dresser le tableau de variation de la fonction v.
   (d) En déduire que $v(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est l'ensemble de définition de h ?
3. Dresser le tableau de variation complet de h .

Etude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Calculer u_1 et justifier que $u_2 \leq 1$ (*on s'aidera de la partie précédente pour limiter les calculs*).
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
3. Que peut-on conclure quant au sens de variation de la suite ?

Solution. **Préliminaire : un polynôme et une étude de signe**

1. 1 est racine évidente de $P(x)$, d'où $x - 1$ divise P.
   D'où il existe $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $P(x) = (x-1)Q(x)$.
   On trouve ensuite que $P(x) = (X-1)(x^2 - 5x + 6)$ en trouvant Q par division euclidienne ou identification des coefficients.
   La factorisation est presque terminée.

Il reste à voir si l'on peut factoriser le polynôme du second degré $Q(x)$.
Pour cela, on calcule son discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$ et on trouve deux racines $x_1 = (5-1)/2 = 2$ et $x_2 = (5+1)/2 = 3$.
D'où, on en déduit que $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, soit encore

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, et en remplaçant x par e^x dans $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$, on trouve que

$$\begin{aligned} &(e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 11e^x - 6 = (e^x-1)(e^x-2)(e^x-3) \\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^{2x} + 11\mathrm{e}^x - 6 = (e^x-1)(e^x-2)(e^x-3), \end{aligned}$$

car $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$ et $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{3x}$ en utilisant les propriétés de l'exponentielle.
En multipliant les deux membres de l'égalité par deux il vient

$$2\mathrm{e}^{3x} - 12\mathrm{e}^{2x} + 22\mathrm{e}^x - 12 = 2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3),$$

Enfin, en divisant les deux membres de l'égalité par e^x et en utilisant que $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$ dans le membre de gauche, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2\mathrm{e}^{3x} - 12\mathrm{e}^{2x} + 22\mathrm{e}^x - 12}{e^x} &= \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x}, \\ \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{3x-x} - 12\mathrm{e}^{2x-x} + 22\mathrm{e}^{x-x} - 12e^{-x} &= \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x} \\ \boxed{\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x} = \frac{2\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^x-2\right)\left(\mathrm{e}^x-3\right)}{\mathrm{e}^x}}&. \end{aligned}$$

Remarque : il y avait d'autres manières de rédiger cette question.

3. Pour étudier le signe de $2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}$, on étudie le signe de chacun des facteurs intervenant dans l'inégalité précédente.
Par ailleurs, $2 > 0$ et $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}$ est du signe de $(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)$.
On a :
$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln(1) = 0$ (car la fonction logarithme est strictement croissante $\mathbb{R}_+^*$)
$\mathrm{e}^x - 2 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2)$
$\mathrm{e}^x - 3 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln(3)$.

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$\mathrm{e}^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\mathrm{e}^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Etude d'une fonction

1. Etude de v
   (a)

```
def v(x):
  y=np.exp(2*x)-12np.exp(x)+22*x-12*np.exp(-x)
  return y

x=np.arrange(0,1.01, 0.01)
y=v(x)
plt.plot(x,y,'b')
plt.show(
```

(b)
$$\begin{aligned} v\left(\ln(2)\right) &= \mathrm{e}^{2\ln(2)} - 12\mathrm{e}^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12\mathrm{e}^{-\ln(2)} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(4)} - 12\times 2 + 22\ln(2) + 12\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 4 - 24 + 22\ln(2) + 6 = 22\ln(2) - 14 \end{aligned}.$$

D'où, $\boxed{v(\ln(2)) = 22\ln(2) - 14}$.

En procédant de même, on trouve $\boxed{v\left(\ln(3)\right) = 22\ln(3) - 23.}$

A noter que cela correspond aux approximations données au début de l'exercice.

(c) Pour étudier les variations de v, il faut étudier le signe de sa dérivée.
La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^{x} + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}$ dont on connait le tableau de signe d'après la q.3) de la partie préliminaire.
On a par ailleurs déjà calculer $v(\ln(2))$ et $v(\ln(3))$ à la question précédente.
Il reste donc juste à calculer $v(0) = 1 - 12 + 0 + 12 = 1$.
On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$v'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$v(x)$					$22\ln(2) - 14 \approx 1,25$				
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			1				$22\ln(3) - 23 \approx 1,17$		

(d) D'après le tableau de variation précédent, le minimum de v sur $\mathbb{R}$ est 1, atteint en 0.
Donc $\boxed{v(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. $\boxed{h \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}}$ car, d'après la question précédente, le dénominateur $v(x) > 0$ pour tout $\in \mathbb{R}$ et donc il ne s'annule jamais.
3. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$
qui est donc du signe de $-v'(x)$ (car $v(x)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) .
Or, le signe de $v'(x)$ est connu d'après la question 1)b) (on l'a étudié pour étudier les variations de v).
Donc il suffit de reprendre la première ligne du tableau de variation de v et de changer les signes en leur opposé.
Enfin, $h(0) = \dfrac{1}{v(0)} = 1$, $h(\ln(2)) = \dfrac{1}{v(\ln(2))} = \dfrac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80$ et $h(\ln(3)) = \dfrac{1}{v(\ln(3))} = \dfrac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86$ d'après l'énoncé.
On obtient :

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$			1				$\approx 0,86$		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
					$\approx 0,80$				

Etude d'une suite

1. On a $u_1 = h(u_0) = h(\ln(2)) = \dfrac{1}{v(\ln(2))} = \dfrac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80$ (cf. q.1)a) partie précédente et d'après l'énoncé pour l'approximation).
De plus, $u_2 = h(u_1)$.
Or d'après les valeurs données dans l'énoncé $\ln(2) \leq u_1 \leq \ln(3)$.
Et donc comme h est strictement croissante sur $[\ln(2); \ln(3)]$, il vient $h(\ln(2)) \leq h(u_1) \leq h(\ln(3))$.

Autrement dit, $0,80 \leq u_2 \leq 0,86$ (cf. tableau q.3 partie précédente).
Et donc $u_2 \leq 1$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $P(n)$: $\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

   Initialisation :
   D'après la question précédente $u_1 \approx 0,80$ et $0,80 \leq u_2 \leq 0,86$.
   Or $\ln(2) \approx 0,69$ d'après l'énoncé.
   Donc $P(1)$ est vraie.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   Supposons $P(n)$ vraie, c'est à dire$\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
   Et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire que $\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$.
   On a par hypothèse de récurrence que $\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
   Or, d'après la q.3 de la partie précédente, h est strictement croissante sur $[\ln(2); 1]$.
   D'où $h(\ln(2)) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(1)$.
   Or $h(\ln(2)) \approx 0,80 \geq \ln(2)$ (cf. tableau de variation de h q.3 partie précédente).
   Et $h(1) \leq 1$ (cf. tableau de variation de h q.3 partie précédente).
   D'où $\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$
   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion :
   Par le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1}$.

3. On peut en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

□

Problème 2 **Suite définie par récurrence**

On considère la suite de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$.

1. (a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Etablir que pour tout $n, 0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$.
   (c) Écrire un programme Python permettant de calculer et de tracer les n premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{1-u_n}$.
   Déduire en utilisant 1.b) que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \leq 2$.
3. (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right]$ en fonction de u_n.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \dfrac{1}{u_n} - 2.$, puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+2}$.
4. Pour tout entier n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k)^2$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $S_n = u_0 - u_{n+1}$.
   (b) Écrire un programme Python permettant de claculer S_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

Solution. 1. (a) $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 \leq 0$.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{2}}.$$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
Remarque : on aurez pu aussi montrer par récurrence que pour tout $n, 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$, si on avait pas vu l'astuce précédente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: $u_n > 0$.
Initialisation :
$u_0 = \frac{1}{2} > 0$.
Donc P_0 est vraie.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire $u_n > 0$.
Et montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1} > 0$.
On a $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 = u_n(1 - u_n)$.
Or par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et $u_n \leq \frac{1}{2}$.
Donc $1 - u_n \geq \frac{1}{2} > 0$. Et donc par produit $u_{n+1} > 0$.
Remarque : on aurait aussi pu raisonner en utilisant les variation de la fonction $x \mapsto x - x^2$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion :
$\boxed{\text{Par le principe de récurrence, on en déduit que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{1}{2}.}$

(c)
```
n=int(input('Donner une valeur pour n:'))
u=1/2
for k in range(1,n+1):
  u=u-u**2
  plt.plot(k,u,'x')
plt.show()
print('u_',n,'=', u)
```

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1-u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \frac{u_n}{u_n(1-u_n)} = \boxed{\frac{1}{1-u_n}.}$
De 1.b), on en déduit que :

$$\begin{aligned} & 0 < u_n < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow\ & -\frac{1}{2} < -u_n < 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2} \leq 1 - u_n \leq 1 \\ \Rightarrow\ & 1 < \frac{1}{1-u_n} < 2 \qquad \text{par inverse} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 2.}$

3. (a) $\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right] = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$ car c'est une somme télescopique (je ne fais pas les détails ici).

Or, $u_0 = 1/2$.

Donc : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right] = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{u_n} - 2.}$

Par ailleurs d'après la q.2), $\forall k \in \mathbb{N},\ 1 \leq \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k}$.
Donc en sommant cette inégalité de $k = 0$ à $n-1$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right]$$

D'où $\boxed{n \leq \dfrac{1}{u_n} - 2}$.

(b) De l'inégalité précédente, on ne déduit que :

$$\begin{aligned} & n \leq \frac{1}{u_n} - 2 \\ \Rightarrow \quad & n + 2 \leq \frac{1}{u_n} \\ \Rightarrow \quad & u_n \leq \frac{1}{n+2} \quad \text{en passant à l'inverse car } u_n > 0 \end{aligned}.$$

Par ailleurs, on a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+2}.}$

4. (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k)^2 = \sum_{k=0}^{n}[u_k - u_{k+1}]$ (par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc $\boxed{S_n = u_0 - u_{n+1}}$ (somme télescopique).

(b)
```
n=int( input ("Donner une valeur pour n :"))
u=1/2
S= 0
for i in range(1,n+1):
     u=u-u**2
     S= S+u
print('S=',S)
```

□

Problème 3 Somme et suite

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

1. Ecrire une procédure Python, qui étant donné un entier $n \geq 1$ choisi par l'utilisateur, calcule et affiche S_n.
2. Montrer que $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. Soit n un entier non nul.

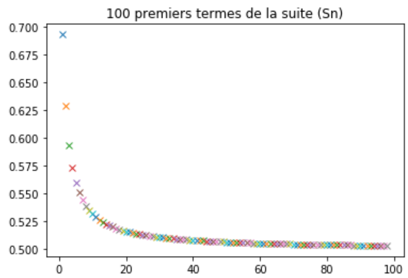
(a) En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{2n^2 + 3n + 1}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

4. Voici ce que donne la représentation graphique des 100 premiers termes de la suite (S_n). Quelle conjecture pouvez vous faire quant à la monotonie de la suite et à sa convergence ?



Solution

```
n= int( input('Donner une valeur pour n:'))
S=0
for k in range(1,n+1):
   S=S+np.log(1+k/(n**2))
print('S=', S)
```

2. On répond à cette question par les études des signes des fonctions $f : x \mapsto \ln(1+x) - (x - \frac{1}{2}x^2)$ et $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$ toutes les deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$.

En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ f'(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

Donc la dérivée de f est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Son minimum est atteint en 0 et vaut $f(0) = 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ f(x) \geq 0$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \ln(x+1) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.
Le même raisonnement s'applique pour g (je ne le détaille donc pas ici).

Conclusion : $\boxed{\forall x > 0, \ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$.
La question précédente nous donne un encadrement de chaque terme de la somme S_n.
En effet, en choisissant $x = \frac{k}{n^2}$ (qui est positif) dans la relation précédente,on obtient directement que pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$\boxed{\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}}.$$

(b) En sommant ces inégalités, il vient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right) \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq S_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leq S_n \leq \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{n+1}{2n}-\frac{2n^2+3n+1}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}}
\end{aligned}$$

4. La suite (S_n) semble décroissante et converger vers $1/2$.

$\square$

Problème 4

On appelle suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :
$F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Une expression explicite de F_n

1. Résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   Montrer que l'une de ses racines appartient à l'intervalle $]1, 2[$: on la notera φ.
   Montrer que l'autre racine appartient à l'intervalle $]-1, 0[$: on la notera ψ.
2. Justifier que l'on a : $\varphi^2 = 1 + \varphi$ puis que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}, \psi = 1 + \dfrac{1}{\psi}$ et $\varphi = -\dfrac{1}{\psi}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

Étude de (F_n)

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que (F_n) est une suite croissante.
6. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 2,\ F_n \geq n - 1$.
   Est-ce que la suite de Fibonacci est majorée ? Est-elle minorée ?

Quelques formules remarquables

7. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k$. Démontrer qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = F_{n+2} - 1$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 - = (-1)^n$.
9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$.
10. On note $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $L_0 = 2, L_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1}+L_n$.
    (a) Donner une formule explicite de (L_n).
    (b) Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{2n} = L_nF_n$.

Un calcul de φ^n

11. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n = \dfrac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}$.

12. En déduire une expression de $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$ en fonction de L_{10} et F_{10}.

Solution. **Une expression explicite de F_n**

1. Résolvons l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   Le discriminant de $x^2 - x - 1$ vaut $\Delta = 5 > 0$.

   Donc le trinôme du second degré admet deux racines : $\boxed{x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.}$

   Etant donné que $2 < \sqrt{5} < 3$, on a $1+\sqrt{5} \in]3,4[$ et $1-\sqrt{5} \in]-2,-1[$.
   Donc $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \in]1,2[$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi \in]-1,0[$.

2. φ étant racine de $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = x + 1$ on a : $\boxed{\varphi^2 = 1 + \varphi}$.

   Puis $\varphi \neq 0$, en divisant par φ cette dernière égalité on obtient que $\boxed{\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}.}$

   De la même façon, on montre que $\boxed{\psi = 1 + \dfrac{1}{\psi}}$.

   Enfin, le produit des racines d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ vaut $\dfrac{c}{a} = -1$.

   D'où $\varphi\psi = -1$ et donc $\boxed{\varphi = -\dfrac{1}{\psi}.}$

3. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$.

   Les solutions de cette équation sont d'après la partie précédente : $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Donc il existe un couple de réels (α, β) tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \alpha\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \beta\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$.
   Ce couple est déterminé par le système (S) suivant :
   $$\begin{cases} 0 &= \alpha + \beta \\ 1 &= \alpha.\varphi + \beta.\psi. \end{cases}$$

   Or, on a l'équivalence suivante :
   $$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= \alpha(\psi - \varphi) \leftarrow \psi.L_1 - L_2 \\ 1 &= \beta(\varphi - \psi). \leftarrow \varphi.L_1 - L_2 \end{cases}$$

   Or $\varphi - \psi = \sqrt{5}$.

   Après calculs, il vient donc :
   $$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$
   Donc on a :
   $$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - \psi^n\Big).}$$

Étude de (F_n)

4. Montrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N},$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: $F_n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :
$F_0 = 0 \in \mathbb{N}$ et $F_1 = 1 \in \mathbb{N}$.
Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Supposons $P(n)$ vrai, c'est à dire $F_n \in \mathbb{N}$ et que $P(n+1)$ est vrai, c'est à dire que $F_{n+1} \in \mathbb{N}$.
Montrons alors que $P(n+2)$ est vraie, c'est à dire $F_{n+2} \in \mathbb{N}$.
On a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ donc par hypothèses de récurrences double, on a $F_{n+2} \in \mathbb{N}$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :
Par le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}.}$

5. Montrons que (F_n) est une suite croissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
   $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \in \mathbb{N}$ (d'après q. précédente).
   Donc $F_{n+1} - F_n \geq 0$.

   Donc $\boxed{(F_n) \text{ est une suite croissante.}}$

6. Montrons par récurrence double que pour $n \geq 2, F_n \geq n-1$.
   Initialisation :
   Par définition : $F_2 = F_0 + F_1 = 1 \geq 2-1$ et $F_3 = F_1 + F_2 = 2 \geq 3-1$.
   Donc l'initialisation est vraie.

   Hérédité :
   Soit n supérieur à 2 fixé.
   Supposons que $F_n \geq n-1$ et que $F_{n+1} \geq n$.
   Montrons alors que $F_{n+2} \geq n+1$.
   On a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
   D'où par hypothèses de récurrences double, on en déduit que :
   $F_{n+2} \geq n-1+n = 2n-1$
   Or $2n-1 \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 2$.
   Donc $F_{n+2} \geq n+1$.
   Donc l'hérédité est vérifiée.

   Conclusion :
   Par le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\forall n \geq 2, F_n \geq n-1.}$

   La suite de Fibonacci est croissante de premier terme $F_0 = 0$ donc $\boxed{\text{elle est minorée par } 0}$.

   On vient de montrer que $\forall n \geq 2, F_n \geq n-1$ donc $\boxed{\text{la suite de Fibonacci ne peut être majorée.}}$

Quelques formules remarquables

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $\forall k \in [|0, n|], F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$
   Donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} F_k = \sum_{k=0}^{n} (F_{k+2} - F_{k+1}) = F_{n+2} - F_1$$
   (Somme telescopique, je ne détaille pas les calculs).

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = F_{n+2} - 1.}$

8. Montrons par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 - = (-1)^n$.
Initialisation :
On a $F_2 = 2$ et donc $F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$.
Donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Supposons que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 - = (-1)^n$.
Montrons alors que $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
Par définition de la suite de Fibonacci, on a :
$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1} \times F_{n+1} \\ &= F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}). \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} \\ &= -(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.) \end{aligned}$$
Or par hypothèse de récurrence, on a $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. Donc :
$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.
L'hérédité est donc vraie.

$\boxed{\text{Conclusion : par le principe de récurrence, on en déduit que } \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - \psi^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}((1+\varphi)^n - (1+\psi)^n) \\ & formule\ du\ binome\ appliquees\ 2\ fois \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{2n} - \psi^{2n}) \\ & car\ \varphi\ et\ \psi\ sont\ solutions\ de\ x^2 = x + 1\ cf\ q.2) \end{aligned}$$
Finalement, on a :
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{2n} - \psi^{2n}) = F_{2n}.}$$

10. (a) Cette suite (L_n) est définie par la même égalité de récurrence que (F_n), seul le premier terme change.
Donc on peut appliquer les résultats trouvés à la question 3 :

La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$.
Les solutions de cette équation sont : $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc il existe un couple de réels (α, β) tels que $L_n = \alpha\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \beta\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$.
Ce couple est déterminé par le système (S) suivant :
$$\begin{cases} 2 &= \alpha + \beta \\ 1 &= \alpha.\varphi + \beta.\psi. \end{cases}$$

Or, on a l'équivalence suivante :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1-2\psi & = & \alpha(\psi-\varphi) \leftarrow \psi.L_1 - L_2 \\ 1-2\varphi & = & \beta(\varphi-\psi). \leftarrow \varphi.L_1 - L_2 \end{array} \right.$$

Or $\varphi - \psi = \sqrt{5}, 2\psi = 1-\sqrt{5}, 2\varphi = 1+\sqrt{5}$.

Après calculs, il vient donc :

$\boxed{\alpha = 1 \text{ et } \beta = 1}$

Donc on a :

$$\boxed{L_n = \varphi^n + \psi^n}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n + \psi^n)(\varphi^n - \psi^n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{2n} - \psi^{2n})$.
en utilisant q.3, q.10 et une identité remarquable.
Donc on a : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{2n} = L_n F_n$.

Un calcul de φ^n

11. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $L_n + \sqrt{5}F_n = (\varphi^n + \psi^n) + (\varphi^n - \psi^n) = 2\varphi^n$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^n = \dfrac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}.}$

12. On en déduit que $\boxed{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = \dfrac{L_{10} + \sqrt{5}.F_{10}}{2}.}$

□