16 décembre 2023

Devoir surveillé n°2

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Exercice 1

On dispose de trois pièces A, B et C. La pièce A est honnête, c'est à dire que lorsqu'on la lance elle tombe sur "pile" avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur "face" avec la probabilité $\frac{1}{2}$. En revanche les pièces B et C sont truquées : la pièce B comporte deux côtés "face" et la pièce C comporte deux côtés "pile".
On choisit au hasard une des trois pièces au début du processus puis on fait les lancers successifs avec cette même pièce.
On note, pour tout entier naturel i non nul, P_i l'événement " obtenir pile lors du i-ème lancer."

1. Quelle est la probabilité de l'événement P_1.
2. Faire un arbre représentant les deux premiers lancers. Calculer la probabilité de l'événement P_2.
3. (a) Calculer la probabilité que les deux premiers lancers amènent "pile".
   (b) Les deux premiers lancers amènent "pile". Quelle est la probabilité que l'on ait choisi la pièce C au début du processus ?
   (c) Si on obtient deux fois "pile" de suite, on décide de mettre la pièce que l'on a tiré de côté. Quelle est la probabilité que l'on mette la pièce C de côté ?
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la probabilité que les n premiers lancers amènent "pile" est : $\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right]$.
   Indication : formule des probas totales car la probabilité que les n premiers lancers amènent "pile" dépend de si on utilise la pièce A ou B ou C.

(b) Donner, en fonction de n, l'expression de la probabilité p_n que l'on ait choisi la pièce C sachant que les n premiers lancers amènent "pile".

Problème 1 **Polynôme et étude de fonction**

On donne les approximations suivantes, qui vous serviront au cours de l'exercice :
$\ln(2) \approx 0,69$ $\quad \ln(3) \approx 1,10$ $\quad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25$ $\quad 22\ln(3) - 23 \approx 1,17$
$\dfrac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80$ $\quad \dfrac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86.$

Préliminaire : un polynôme et une étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$

1. Factoriser P par la méthode de votre choix.
2. En calculant, pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\dfrac{2P(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$ de deux manière différente, justifier qu'on a l'égalité :
$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x} = \frac{2(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x - 3)}{\mathrm{e}^x}.$$
3. Déduire des questions précédentes le signe de $2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, en dressant proprement le tableau de signe.

Etude d'une fonction

On pose $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22x + 12\mathrm{e}^{-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.
Le but de cette partie est l'étude de la fonction h.

1. Etude de v
   (a) Écrire un programme Python pour définir la fonction v et la représenter sur l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Calculer les valeurs exactes de $v(\ln(2))$ et de $v(\ln(3))$ en détaillant vos calculs.
   (c) A l'aide des résultats préliminaires, dresser le tableau de variation de la fonction v.
   (d) En déduire que $v(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est l'ensemble de définition de h ?
3. Dresser le tableau de variation complet de h .

Etude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Calculer u_1 et justifier que $u_2 \leq 1$ (*on s'aidera de la partie précédente pour limiter les calculs*).
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
3. Que peut-on conclure quant au sens de variation de la suite ?

Problème 2 **Suite définie par récurrence**

On considère la suite de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$.

1. (a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (b) Etablir que pour tout $n, 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.

   (c) Écrire un programme Python permettant de calculer et de tracer les n premiers termes de la suite (u_n).

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1-u_n}$.

   Déduire en utilisant 1.b) que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 2$.

3. (a) Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right]$ en fonction de u_n.

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{u_n} - 2.$, puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n+2}$.

4. Pour tout entier n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k)^2$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $S_n = u_0 - u_{n+1}$.

   (b) Écrire un programme Python permettant de claculer S_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

Problème 3 **Somme et suite**

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

1. Ecrire une procédure Python, qui étant donné un entier $n \geq 1$ choisi par l'utilisateur, calcule et affiche S_n.

2. Montrer que $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. Soit n un entier non nul.

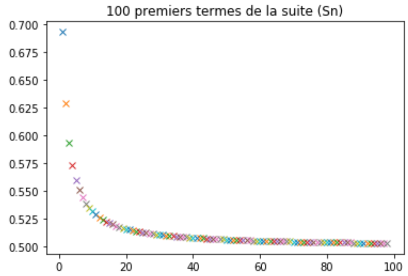
   (a) En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$,

   $$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$\frac{n+1}{2n} - \frac{2n^2+3n+1}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

4. Voici ce que donne la représentation graphique des 100 premiers termes de la suite (S_n). Quelle conjecture pouvez vous faire quant à la monotonie de la suite et à sa convergence ?



Problème 4

On appelle suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :
$F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Une expression explicite de F_n

1. Résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   Montrer que l'une de ses racines appartient à l'intervalle $]1, 2[$: on la notera φ.
   Montrer que l'autre racine appartient à l'intervalle $]-1, 0[$: on la notera ψ.
2. Justifier que l'on a : $\varphi^2 = 1 + \varphi$ puis que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}, \psi = 1 + \dfrac{1}{\psi}$ et $\varphi = -\dfrac{1}{\psi}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

Étude de (F_n)

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que (F_n) est une suite croissante.
6. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 2,\ F_n \geq n - 1$.
   Est-ce que la suite de Fibonacci est majorée ? Est-elle minorée ?

Quelques formules remarquables

7. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k$. Démontrer qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = F_{n+2} - 1$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 - = (-1)^n$.
9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$.
10. On note $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $L_0 = 2, L_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.
    (a) Donner une formule explicite de (L_n).
    (b) Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{2n} = L_n F_n$.

Un calcul de φ^n

11. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n = \dfrac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}$.
12. En déduire une expression de $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$ en fonction de L_{10} et F_{10}.