21 octobre 2023

Correction devoir n°1

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$.
Déterminer son ensemble de définition puis démontrer qu'elle est impaire.

Solution. $D_f = \{x \in \mathbb{R}, e^{-x}+1 \neq 0\}$.
Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x}+1 \neq 0$.
Donc $D_f = \mathbb{R}$.

Soit $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$

et $f(-x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

et

$$\begin{aligned} -f(x) &= -\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \\ &= -\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} \\ &= -\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} \\ &= -\frac{1-e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} \\ &= f(-x) \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est une fonction impaire.}}$ □

Exercice 2

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 7x + 3y - 5z = 2 \end{cases}$

Solution. On applique la méthode du pivot de Gauss pour résoudre ce système avec les opérations suivantes :

$$\begin{cases} 2x & +3y & +z = 4 \\ -x & +y & +2z = 3 \\ 7x & +3y & -5z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x & +y+ & 2z = 3 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x & +3y & +z = 4 \\ 7x & +3y & -5z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & -2z = -3 & L_1 \leftarrow -L_1 \\ 2x & +3y & +z = 4 \\ 7x & +3y & -5z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & -2z = -3 \\ & 5y & +5z = 10 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & 10y & +9z = 23 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & -2z = -3 \\ & y & +z = 2 & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ & 10y & +9z = 23 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & -2z = -3 \\ & y & +z = 2 \\ & & -z = 3 & L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2 \end{cases}$$

on obtient un système triangulaire 3 inconnues, trois pivots non nuls qui est donc de Cramer.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \\ z = -3 & L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2 \end{cases}$$

Donc le système possède $\boxed{(-4; 5; -3) \text{ comme unique solution}}$. □

Exercice 3

1. Que fait le programme suivant ?

```
a=int(input('entrez un réel:'))
a=a**2
a=a+2*a
a=a+1
```

2. Que renvoie ce programme si l'utilisateur entre la valeur 2 ?
3. Existe t-il une valeur de a pour laquelle l'ordinateur renvoie la valeur 0 ? Préciser.

Solution.

1. Ce programme demande à l'utilisateur de rentrer une valeur pour a puis calcule successivement a^2 puis $a^2 + 2a^2$ et enfin $a^2 + 2a^2 + 1$.
   Pour une valeur de a donnée, il renvoie donc $\boxed{3a^2 + 1}$.
2. Si $a = 2$, le programme renvoie $3 \times 2^2 + 1 = \boxed{13}$.
3. Il s'agit de résoudre $3a^2 + 1 = 0$.
   Or $3a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = -1/3$, ce qui impossible.
   D'où, $\boxed{\text{le programme ne peut pas renvoyer la valeur 0.}}$

□

Exercice 4

1. Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :
   (a) $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ a < \ln x$
   (b) $\forall x < \sqrt{2},\ \exists a \in \mathbb{R}_+^*,\ x + a < \sqrt{2}$
2. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses, donner leur négation, réciproque et contraposée :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x \Rightarrow x \geq 0$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Rightarrow x \geq 0$ ou $y \geq 0$

Solution.

1. (a) $\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ a < \ln x \text{ est vrai}}$.
   Pour le voir, considérons un $a \in \mathbb{R}$*. Posons* $x = e^{a+1} \in \mathbb{R}$*. Alors* $\ln(x) = a + 1$*.*
   D'où $a < \ln x$*.*

   (b) $\boxed{\forall x < \sqrt{2},\ \exists a \in \mathbb{R}_+^*,\ x + a < \sqrt{2} \text{ est vrai}}$.
   Pour le voir considérons un $x < \sqrt{2}$*.*
   Posons $a = \dfrac{\sqrt{2} - x}{2} > 0$*, car* $x < \sqrt{a}$*.*
   Alors $x + a = \dfrac{\sqrt{2} + x}{2}$*.*
   Or $x < \sqrt{a}$ *donc* $x + a < \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$*.*

2. (a) La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x \Rightarrow x \geq 0$ est vraie.
   Négation :
   $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$ et $x < 0$
   Contraposée :

$\forall x \in \mathbb{R}, x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} \neq x$
Réciproque :
$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$.

(b) La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Rightarrow x \geq 0$ ou $y \geq 0$ est vraie.
Négation :
$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 0$ et non$(x \geq 0$ ou $y \geq 0)$
$\equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 0$ et $(x < 0$ et $y < 0)$
Contraposée :
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ non(x \geq 0$ ou $y \geq 0) \Rightarrow xy \neq 0$
$\equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x < 0$ et $y < 0) \Rightarrow xy \neq 0$
Réciproque :
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x \geq 0$ ou $y \geq 0) \Rightarrow xy = 0$.

$\square$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 2^n$.

Solution. Montrons par récurrence double que pour tout entier n : $u_n = 1 + 2^n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: "$u_n = 1 + 2^n$."
Initialisation :
Vérifions $P(0)$. On a d'une part : $u_0 = 2$ et d'autre part $1 + 2^0 = 1 + 1 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.
Vérifions $P(1)$. On a d'une part : $u_1 = 3$ et d'autre part $1 + 2^2 = 1 + 2 = 3$. Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité :
Soit n un entier fixé. Supposons que $P(n)$ est vraie,
c'est à dire : $u_n = 1 + 2^n$
ET que $P(n+1)$ est vraie,
c'est à dire : $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$.
Montrons alors que $P(n+2)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+2} = 1 + 2^{n+2}$.
On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \quad \text{d'après l'énoncé} \\ &= 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 - 2 \times 2^n \\ &= 1 + 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} \\ &= 1 + 2^{n+1}(3 - 1) \\ &= 1 + 2^{n+1} \times 2 \\ &= 1 + 2^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence double, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout entier } n : u_n = 1 + 2^n.}$

$\square$

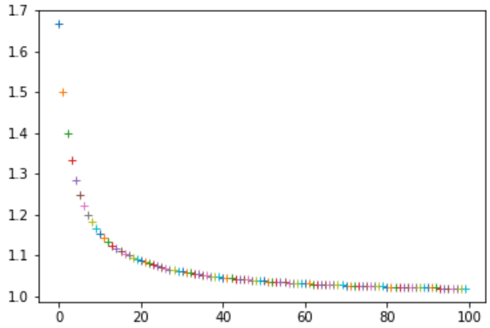
Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$$

1. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{3x - 1}{x + 1}$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire que, pour tout $x \geqslant 1, f(x) \geqslant 1$.

2. Écrire un programme Python permettant de définir la fonction f.
3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$.
4. Voici la représentation graphique des 100 premiers termes de la suite à l'aide d'un programme Python.



Que pouvez vous conjecturer sur la monotonie et la convergence de la suite ?

Solution. 1. (a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ car c'est un quotient de fonction dérivables sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ et pour tout réel $x \neq -1$

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

(b) En particulier, f est croissante sur $[1, +\infty[$, donc elle est minorée par $f(1) = 1$ sur cet intervalle. Ceci signifie que, pour tout $x \geqslant 1, f(x) \geqslant 1$.

2.

```
def f(x):
    return (3*x-1)/(x+1)
```

3. Montrons pas récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,u_n est défini et $u_n \geqslant 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: u_n est défini et $u_n \geqslant 1$. .
Initialisation :
$u_0 = 2$ est bien défini et est supérieur à 1.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie c'est à dire u_n est défini et $u_n \geqslant 1$.
Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie c'est à dire u_{n+1} est défini et $u_{n+1} \geqslant 1$.

On a par hypothèse de récurrence que u_n est définie et $u_n \geq 1$.
Donc $u_n + 1 \neq 0$ et donc $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$ est bien défini.
De plus, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \geqslant 1$ par hypothèse de récurrence.
Donc d'après la question 1.b., $u_{n+1} \geqslant 1$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et minorée par 1.

4. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 1.

$\square$

Exercice 7

1. Montrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x+1$.
2. En déduire que :
$$\forall n \in N^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], e^{t^2}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant 1.$$

Solution. 1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto e^x - (x+1)$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - 1.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.
D'où le tableau de variation suivant :

2. Soit $n \in N^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$.
Ecrivons l'inégalité $e^x \geq x+1$ avec $x = -\frac{t^2}{n}$.
On obtient alors $1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n^2}}$.
Comme $t \in [0, \sqrt{n}]$, alors $1 - \frac{t^2}{n} \geq 0$.
Or, $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où on en déduit que :
$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{t^2}{n}}\right)^n$$
D'où,
$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-n\times\frac{t^2}{n}} = e^{-t^2}$$
On en conclut que
$$e^{t^2}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}e^{-t^2}$$
D'où,
$$e^{t^2}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq 1$$
Conclusion : $\boxed{\forall n \in N^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], e^{t^2}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant 1.}$

□

Problème 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et justifier que f est également dérivable sur D.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Justifier que, pour tout $x \in D$,
$$f'(x) = \frac{-2xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2\left(1-x^2\right)} \qquad \text{avec} \qquad g(x) = x^2+1+\left(1-x^2\right)\ln\left(1-x^2\right).$$
4. (a) Déterminer le signe de $g'(x)$ pour $x \in D$.
   (b) Dresser alors le tableau de variation de g sur D.

(c) En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in D$.

5. Dresser alors le tableau de variation de f sur D.

Solution. 1. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 > 0 \text{ et } x^2 + 1 \neq 0\}$.
Or, $x^2 + 1 \geqslant 1$ donc $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel x.
Et $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
D'où f est définie sur $D =]-1, 1[$.
Les fonctions $x \mapsto 1 - x^2$ et $x \mapsto x^2 + 1$ sont polynomiales donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, la première ne s'annule pas sur D et la deuxième est strictement positive sur D.
D'où, par composée et quotient de fonctions dérivables sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D, f est définie et dérivable sur D.

2. Soit $x \in]-1, 1[$ alors $-x \in -1, 1[$ (l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0) et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(-x) = \frac{\ln\left(1 - (-x)^2\right)}{(-x)^2 + 1} = \frac{\ln\left(1 - x^2\right)}{x^2 + 1} = f(x).$$

Donc f est paire.

3. Soit $x \in D$. $f'(x) = \frac{\frac{-2x}{1-x^2}\left(x^2+1\right) - 2x\ln\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

$$= \frac{-2x\left(x^2+1\right) - 2x\ln\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2\left(1-x^2\right)}$$
$$= \frac{-2x\left(\left(x^2+1\right) + \ln\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^2\left(1-x^2\right)}$$
$$= \frac{-2xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2\left(1-x^2\right)}$$

4. (a) Sur $D, x \mapsto 1 - x^2, x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto \ln\left(1 - x^2\right)$ sont dérivable donc par produit et somme, g est dérivable sur D.
Soit $x \in D, g'(x) = 2x + (-2x)\ln\left(1 - x^2\right) + \left(1 - x^2\right)\frac{-2x}{1-x^2} = -2x\ln\left(1 - x^2\right)$.
Or, pour tout $x \in D$, $1 - x^2 \leqslant 1$ donc $\ln\left(1 - x^2\right) \leqslant 0$.
D'où $g'(x)$ est du signe de $2x$.
Et donc on en déduit que g est strictement décroissante sur$]-1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1[$.
(b) On a $g(0) = 1$ et g est strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1[$ d'après la question précédente (faire le tableau de variation).
(c)
On a que g admet sur $]-1, 1[$ un minimum atteint en 0 qui vaut $g(0) = 1$.
D'où, pour tout réel $x \in D, g(x) \geqslant 1$.
Ainsi, $g(x) > 0$ pour tout $x \in D$.

5. Pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{-2xg(x)}{(x^2+1)^2(1-x^2)}$. Or, pour $x \in D =]-1, 1\left[, 1 - x^2 > 0, \left(x^2 + 1\right)^2 > 0\right.$ et $g(x) > 0$.
Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x$.
Et donc on en déduit que f est strictement croissante sur$]-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1[$.

□

Problème 2

On considère la fonction $f : x \mapsto (x + \ln(x))e^{x-1}$.

1 Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction $g : x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$ (hors limites).
3. En déduire que pour tout $x > 0, \ln(x) + \frac{1}{x} > 0$ puis $1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x) > 0$.
4. Déterminer le sens de variation de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 et représenter $\mathcal{C}_f$.

2 Partie 2 : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$.
2. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant e^n$.

Solution. **3 Partie 1 : Étude de la fonction f**

1. $x \mapsto x$ et $x \mapsto x - 1$ sont affines donc définies sur $\mathbb{R}.x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Par somme, $x \mapsto x + \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   De plus, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc par composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   Par produit, f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est sur $\mathbb{R}^*$.
   Par somme, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour tout $x > 0, g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.
   Puisque $x^2 > 0, g'(x)$ est du signe de $x - 1$.
   Donc $g'(x)$ est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$.
   D'où g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
   (Faire le tableau de variation).
3. D'après la question précédente, g admet sur $\mathbb{R}_+^*$ un minimum atteint en 1 et qui vaut 1.
   Donc $g(x) \geqslant 1$ pour tout $x > 0$ et donc en particulier $g(x) > 0$, c'est-à-dire $\ln(x) + \frac{1}{x} > 0$
   De plus, $1+\frac{1}{x}+x+\ln(x) = \left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right) + (1+x)$ avec $\ln(x)+\frac{1}{x} > 0$ et $x+1 > 0$ car $x > 0$.
   Donc par somme, $1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x) > 0$.
4. $x \mapsto x, x \mapsto x - 1, x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont dérivables $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Par somme, composée, puis produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Soit $x > 0.f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x-1} + (x + \ln(x))\mathrm{e}^{x-1} = \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right)\mathrm{e}^{x-1}$.
   Or, $1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x) > 0$ et $\mathrm{e}^{x-1} > 0$.
   Donc de façon évidente $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
   Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. $f'(1) = 3$ et $f(1) = 1$ donc $f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$.
   L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est donc $y = 3x - 2$.

4 Partie 2 : Étude d'une suite récurrente

1. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P(n) : u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$.
   Initialisation :
   D'après l'énoncé $u_0 = 2$ existe et $u_0 \geqslant 2$.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $P(n)$ vraie, c'est à dire u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
   Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est à dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant 2$.

Par hypothèse de récurrence $u_n > 0$, donc $u_n \in D_f$ et donc et $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien.
Et comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que u_n et 2 en sont éléments, on en déduit que
$f(u_n) \geqslant f(2) = (2 + \ln(2)) \times \mathrm{e}$.
Or $\ln(2) \geqslant 0$ car $(2 \geqslant 1)$, donc $2 + \ln(2) \geqslant 2$.
Et $\mathrm{e} \geqslant 1$.
Par produit d'inégalités de nombres positifs, $f(2) \geqslant 2$. Donc $u_{n+1} \geqslant 2$.
Conclusion :
Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$.

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant e^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n \geqslant e^n$.
Initialisation :
$u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $u_0 \geqslant e^0$.
Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Supposons $P(n)$ vraie, c'est à dire que $u_n \geqslant e^n$.
Montrons $P(n+1)$ vraie, c'est à dire que $u_{n+1} \geqslant e^{n+1}$.

On a $u_{n+1} = f(u_n) = (u_n + \ln(u_n))\, e^{u_n - 1}$.
Or $\ln(u_n) \geqslant \ln(2) \geqslant 0$ (par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$).
Donc $u_n + \ln(u_n) \geqslant u_n \geqslant e^n$.
Par ailleurs, $u_n - 1 \geqslant 1$ donc $e^{u_n - 1} \geqslant e^1$, par croissance de exp sur $\mathbb{R}$.
Par produit d'inégalités de nombres positifs, $u_{n+1} \geqslant e^n \times e^1 = e^{n+1}$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant e^n$

$\square$

Problème 3

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit $x \geq 1$. Établir les inégalités suivantes : $1 \leq f(x)$ et $f(x) \leq \dfrac{x+1}{2}$.
2. **Asymptote à $\mathcal{C}_f$**

   (a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c à déterminer tel que :
   $$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) - ax - b = \frac{c}{2x - 1}$$
   (b) Donner les positions relatives de $(\mathcal{D})$, d'équation $y = ax + b$ et de $\mathcal{C}_f$.
   on admettra que $(\mathcal{D})$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
3. **Variations de f**
   (a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.
   (b) Préciser le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.

Solution. A noter que les trois parties étaient indépendantes.

1. Pour établir les inégalités suivantes : $1 \leq f(x)$ et $f(x) \leq \frac{x+1}{2}$, le mieux est d'étudier, dans les deux cas, le signe de la différence entre les deux termes de l'inégalité. On peut penser comme je vous l'ai répété dans le cours à poser h la fonction définie par $f(x)-1$, puis à dériver h pour étudier son signe. Cette méthode marche toujours, mais ici on pouvait résoudre la question plus facilement sans dériver h et donc sans avoir à calculer la dérivée de f (à noter d'ailleurs que la question de la dérivée de f vient après en question 3)a)), en étudiant directement $f(x)-1$.

   Soit $x \geq 1$. $f(x)-1 = \frac{x^2}{2x-1} - 1 = \frac{x^2-2x+1}{2x-1} = \frac{(x-1)^2}{2x-1} \geq 0$
   car le numérateur est un carré et le dénominateur est positif.

   D'où la première inégalité $\boxed{f(x) \geq 1}$.

   De plus, $\frac{x+1}{2} - f(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{x^2}{2x-1} = \frac{(2x-1)(x+1)-2x^2}{2(2x-1)} = \frac{x-1}{2(2x-1)} \geq 0$ car $x \geq 1$.

   D'où la seconde inégalité $\boxed{f(x) \leq \frac{x+1}{2}}$.

2. **Asymptote à $\mathcal{C}_f$**

   (a) Cela revient à montrer qu'il existe trois réels a, b et c à déterminer tel que :
   $\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = ax+b+\frac{c}{2x-1}$.

   Or, pour $x \in [1,+\infty[, \quad ax+b+\frac{c}{2x-1} = \frac{(ax+b)(2x-1)+c}{2x-1} = \frac{2ax^2+(2b-a)x+(c-b)}{2x-1}$.

   D'où

   $$\begin{aligned}
   &\forall x \in [1,+\infty[, \quad ax+b+\frac{c}{2x-1} = f(x)\\
   \Leftrightarrow\ &\forall x \in [1,+\infty[, \quad \frac{2ax^2+(2b-a)x+(c-b)}{2x-1} = \frac{x^2}{2x-1}\\
   \Leftrightarrow\ &\forall x \in [1,+\infty[, \quad 2ax^2+(2b-a)x+(c-b) = x^2\\
   \Leftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{r} 2a=1\\ 2b-a=0\\ c-b=0 \end{array}\right.\\
   \Leftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{4}\\ c=\frac{1}{4} \end{array}\right. .
   \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{2x-1}}$.

   (b) On étudie le signe de $f(x)-(ax+b)$ qui vaut,
   d'après la question précédente, $\frac{1}{4}\frac{1}{2x-1} > 0$.

   Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au dessus de } (\mathcal{D}) \text{ sur } [1,+\infty[}$.

3. **Variations de f**

   (a) f est dérivable sur $[1,+\infty[$ car c'est un quotient de fonctions dérivables sur $[1,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x \in [1,+\infty[$
   $f'(x) = \frac{2x(2x-1)-x^2\times 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} \geq 0.$

   (b) Donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } [1,+\infty[}$.

□

Problème 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la dérivée f' de f et son signe. En déduire le tableau de variation de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f dans un repère orthonormal au point d'abscisse 1.
4. Écrire un programme Python permettant de définir la fonction f.
5. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
6. (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.

   (b) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$.

   (c) En déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solution. 1. La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 - x + 1 \geq 0$ (car on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif).
Etudions le signe de $x^2 - x + 1$.
On a $\Delta = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3 < 0$.
D'où, l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de racines et $x^2 - x + 1$ est toujours strictement positif.
On en conclut que $D_f = \mathbb{R}$.

2. f est de la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = x^2 - x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Comme $x^2 - x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u'(x)}}.$$
Or $u'(x) = 2x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On en conclut donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$
Comme $\sqrt{x^2 - x + 1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f' sera du signe de $2x - 1$.
Or, $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.
Donc $f'(x)$ sera donc positif pour $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et négatif pour $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
D'où f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
On en déduit alors le tableau suivant

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
variation de f	$\searrow$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\nearrow$

en notant que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{4}}$.
N'oublier pas de calculer les valeurs de f en les points particuliers qui apparaissent dans le tableau.

3. L'équation de la tangente à f au point d'abscisse 1 vaut $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Or, $f(1) = \sqrt{1^2 - 1 + 1} = \sqrt{1} = 1$ et $f'(1) = \dfrac{2-1}{2\sqrt{1^2-1+1}} = \dfrac{1}{2}$.
D'où l'équation de la tangente à f au point d'abscisse 1 vaut $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

4.
```
import numpy as np
def f(x):
    return np.sqrt(x**2-x+1)
```

5. On résout $\sqrt{x^2 - x + 1} = x$.
Comme nous l'avons déja évoqué précédemment, $x^2 - x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc l'équation est bien définie sur tout $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, on a
$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2-x+1} = x \\ \Rightarrow\ &\sqrt{x^2-x+1}^2 = x^2 \\ \Rightarrow\ &x^2 - x + 1 = x^2 \\ \Rightarrow\ &-x+1 = 0 \\ \Rightarrow\ &x = 1. \end{aligned}$$
Et on peut vérifier par calcul que 1 est bien solution.
D'où $S = \{1\}$.

6. (a) D'après la question 2, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$.
D'où, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2f(x)}$.

(b) Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, la fonction f est strictement croissante (cf. tableau de variation).
D'où, en particulier, $x \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Or, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$.
D'où, on en conclut que pour tout x dans $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $f(x) \geq \sqrt{\dfrac{3}{4}}$.

(c) Soit $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. D'après le tableau de signe, $f'(x) \geq 0$.
Par ailleurs, $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2x - 1 \leq 1$.
D'où en particulier, $2x - 1 \leq 1$.
Par ailleurs, d'après la question précédente $f(x) \geq \sqrt{\dfrac{3}{4}} > 0$ d'où
$$0 < \frac{1}{f'(x)} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
et donc $0 < \dfrac{1}{2f'(x)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
On en conclut que $\begin{cases} 0 \leq 2x - 1 \leq 1 \\ \\ 0 < \dfrac{1}{2f'(x)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
Attention, quand on passe à l'inverse, il faut bien préciser que toutes les quantités en

jeu sont strictement positives ou strictement négatives. Autrement, si on a à la fois des quantités positives et des quantités négatives, on ne peut pas inverser comme ça les inégalités.

□