21 octobre 2023

Devoir n°1

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être encadrés ou soulignés.

Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là, notamment en ce qui concerne les problèmes qui sont généralement construits de façon progressive (les questions suivantes dépendant de celles précédentes).

Enfin, lisez bien les énoncés et les hypothèses et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$.
Déterminer son ensemble de définition puis démontrer qu'elle est impaire.

Exercice 2

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+y+2z=3 \\ 7x+3y-5z=2 \end{cases}$

Exercice 3

1. Que fait le programme suivant ?

```
a=int(input('entrez un réel:'))
a=a**2
a=a+2*a
a=a+1
```

2. Que renvoie ce programme si l'utilisateur entre la valeur 2 ?
3. Existe t-il une valeur de a pour laquelle l'ordinateur renvoie la valeur 0 ? Préciser.

Exercice 4

1. Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :
   (a) $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ a < \ln x$
   (b) $\forall x < \sqrt{2},\ \exists a \in \mathbb{R}_+^*,\ x + a < \sqrt{2}$
2. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses, donner leur négation, réciproque et contraposée :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x \Rightarrow x \geq 0.$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Rightarrow x \geq 0$ ou $y \geq 0$

Exercice 5

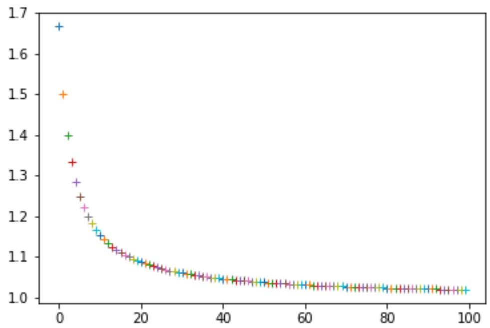
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$$

1. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+1}$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire que, pour tout $x \geqslant 1, f(x) \geqslant 1$.
2. Écrire un programme Python permettant de définir la fonction f.
3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$.
4. Voici la représentation graphique des 100 premiers termes de la suite à l'aide d'un programme Python.



   Que pouvez vous conjecturer sur la monotonie et la convergence de la suite ?

Exercice 7

1. Montrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$.
2. En déduire que :

$$\forall n \in N^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], e^{t^2}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant 1.$$

Problème 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et justifier que f est également dérivable sur D.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Justifier que, pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{-2xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2\left(1-x^2\right)} \qquad \text{avec} \qquad g(x) = x^2+1+\left(1-x^2\right)\ln\left(1-x^2\right).$$

4. (a) Déterminer le signe de $g'(x)$ pour $x \in D$.
   (b) Dresser alors le tableau de variation de g sur D.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in D$.
5. Dresser alors le tableau de variation de f sur D.

Problème 2

On considère la fonction $f : x \mapsto (x+\ln(x))\mathrm{e}^{x-1}$.

1 Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction $g : x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$ (hors limites).
3. En déduire que pour tout $x > 0, \ln(x) + \frac{1}{x} > 0$ puis $1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x) > 0$.
4. Déterminer le sens de variation de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 et représenter $\mathcal{C}_f$.

2 Partie 2 : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$.
2. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant e^n$.

Problème 3

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit $x \geq 1$. Établir les inégalités suivantes : $1 \leq f(x)$ et $f(x) \leq \dfrac{x+1}{2}$.

2. **Asymptote à $\mathcal{C}_f$**

   (a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c à déterminer tel que :
   $$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) - ax - b = \frac{c}{2x-1}$$

   (b) Donner les positions relatives de $(\mathcal{D})$, d'équation $y = ax + b$ et de $\mathcal{C}_f$.
   on admettra que $(\mathcal{D})$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3. **Variations de f**

   (a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.

   (b) Préciser le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.

Problème 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la dérivée f' de f et son signe. En déduire le tableau de variation de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f dans un repère orthonormal au point d'abscisse 1.
4. Écrire un programme Python permettant de définir la fonction f.
5. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
6. (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.

   (b) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$.

   (c) En déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.