17 mai 2018

Concours blanc

4h

La présentation, la lisibilité et l'orthographe entreront dans l'appréciation des copies. Une copie non soignée sera pénalisée. Les résultats essentiels et les réponses aux questions doivent être ***encadrés ou soulignés****.*

La justification des résultats, la clarté et la précision dans le raisonnement est prise en compte dans la notation. Vous pouvez admettre le résultat d'une question si vous n'arrivez vraiment pas à le montrer, mais il faut à ce moment là l'indiquer clairement sur la copie.

Il n'est pas nécessaire de faire les exercices dans l'ordre, à condition de clairement numéroter sur sa copie les questions auxquelles on répond. En revanche, il est déconseillé de changer sans arrêt d'exercice et de répondre à des questions par ci par là.

Enfin, ***lisez bien les énoncés et les hypothèses*** *et prenez le temps de réfléchir et de chercher au brouillon.*

L'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Les téléphones doivent être rangés dans les sacs.

Bon travail !

Exercice 1

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-y-z, -x-z, x+y+2z) \end{array} \right.$

1. Justifier que f est une application linéaire.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{X \in \mathbb{R}^3,\ f(X) = X\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.
3. Déterminer $Ker(f)$ et en donner une base. f est -elle injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$?
4. Sans calculer $Im(f)$ déterminer sa dimension. f est-elle surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (à justifier) ?
5. Déterminer une base de $Im(f)$ et retrouver les résultats de la question précédente.

Solution. **Partie I**

1. f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, car il existe la matrice A tel que $\forall X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $Y = AX.$, où $Y = \begin{pmatrix} -y-z \\ -x-z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} X = (a,b,c) \in E \quad & \Leftrightarrow f(X) = X \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a-b-c = 0 \\ -a-b-c = 0 \\ -a-b-c = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \ -a-b-c = 0 \right. \\ & \Leftrightarrow c = -a-b \end{aligned}$$

D'où $E = \{(a, b, -a-b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(1,0,-1) + b(0,1,-1),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Ainsi $E = Vect\,((1,0,-1),(0,1,-1))$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } E \text{ est un espace vectoriel (comme espace engendré par certains vecteurs).}}$

De plus $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ forment une famille génératrice de E et aussi une famille libre, car de manière évidente les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$\boxed{\text{D'où ces deux vecteurs forment une base de } E.}$

3. Déterminons $Ker(f)$.

$$\begin{aligned} X = (a,b,c) \in Ker(f) &\Leftrightarrow f(X) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -b-c=0 \\ -a-c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=-c \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(f) = \{(-c,-c,c),\ c \in \mathbb{R}\} = \{c(-1,-1,1),\ c \in \mathbb{R}\} = Vect\,((-1,-1,1))$.
De plus $U = (-1,-1,1)$ est générateur de $Ker(f)$ et par ailleurs il forme une famille libre car il est non nul.

$\boxed{\text{D'où } U \text{ forme une base de } Ker(f).}$

Par ailleurs $Ker(f) \neq \{0\}$.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas injective de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^3.}$

4. D'après le théorème du rang :

$$dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}^3)$$

$\boxed{\text{D'où } dim(Im(f)) = 3-1 = 2.}$ $\boxed{f \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ car } dim(Im(f) = 2 \neq dim(R^3).\text{Don}}$

5. Pour déterminer Imf calculons $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$, où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On a :
$f(\varepsilon_1) = (0,-1,1) = e'_1$
$f(\varepsilon_2) = (-1,0,1) = e'_2$,
$f(\varepsilon_3) = (-1,-1,2) = e'_3$.
D'où $Im(f) = Vect\,(e'_1, e'_2, e'_3)$.
On remarque que $e'_3 = e'_1 + e'_2$.

$\boxed{\text{D'où } Im(f) = Vect(e'1, e'_2) = Vect\,((1,0,-1),(0,1,-1)).}$

□

Problème 1

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1-p$.
Dans la suite, on s'intéresse à une épreuve de saut en hauteur au cours de laquelle un athlète doit essayer, pour gagner, de réussir à passer dans l'ordre n hauteurs numérotées $1, 2, \ldots, n$, l'athlète ne pouvant accéder à la hauteur suivante que s'il a réussi à passer la hauteur précédente. L'épreuve s'arrête lorsque l'athlète échoue son saut à une hauteur donnée ou bien lorsqu'il a réussi à passer les n hauteurs.
Pour tout $k \in [|1; n-1|]$ on dit que le niveau de l'athlète est k si, et seulement si, il réussit à passer la hauteur k et échoue à la hauteur $k+1$. On dit que le niveau de l'athlète est n si, et seulement si, il réussit à passer les n hauteurs et on dit que le niveau de l'athlète est 0 s'il échoue dès le la hauteur 1.
On admet que la probabilité de passer d'une hauteur à une autre est constante et égale à p, la probabilité de passer la hauteur 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau atteint par l'athlète.

Pour tout $k \in [|1, n|]$, on note R_k l'évènement "l'athlète réussit à passer la hauteur k."

1. (a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Déterminer la probabilité $P(X_n = 0)$.
   (c) Écrire l'événement $(X_n = n)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $P(X_n = n)$.
   (d) Écrire, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $(X_n = k)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $P(X_n = k)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.
2. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
3. Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Solution. 1. (a) L'athlète peut échouer dès le premier saut, auquel cas $X_n = 0$. Il peut aussi réussir à passer les n hauteurs de saut, auquel cas $X_n = n$. Toutes les valeurs intermédiaires étant possible, on en déduit que $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]}$.

(b) $[X_n = 0]$ correspond à un échec dès la première hauteur, ce qui arrive avec probabilité $1 - p$. Ainsi,

$$P(X_n = 0) = 1 - p = q$$

(c) On a :

$$[X_n = n] = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n$$

D'où d'après la formule des probabilités composées il vient :

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \\ &= P(R_1) P_{R_1}(R_2) \times \cdots \times P_{\cap_{i=1}^{n-1} R_i}(R_n) \\ &= p \times p \times \cdots \times p \\ &= p^n \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(X_n = n) = p^n.}$

(d) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$.
Toujours d'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P\left(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \bar{R}_{k+1}\right) \\ &= P(R_1) P_{R_1}(R_2) \times \cdots \times P_{\cap_{j=1}^{k-1} R_j}(R_k) P_{\cap_{j=1}^{k} R_j}\left(\bar{R}_{k+1}\right) \\ &= p \times p \times \cdots \times p \times q \\ &= p^k q \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1; n-1]\!],\ P(X_n = k) = p^k q.}$

Pour $k = 0$, on a $p^k q = q = P(X_n = 0)$ et la formule reste donc valable pour $k = 0$.

2. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P\left(X_n=k\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} P\left(X_n=k\right)+P\left(X_n=n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} p^k q+p^n \\
&= q \times \frac{1-p^n}{1-p}+p^n=1-p^n+p^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. (a) Le support de X_n étant fini, X_n admet donc nécessairement une espérance qui vaut :

$$E\left(X_n\right)=\sum_{k=0}^{n} kP\left(X_n=k\right)=\sum_{k=1}^{n-1} kqp^k+np^n=(1-p)p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}+np^n$$

Ainsi, $\boxed{E\left(X_n\right)=(1-p)p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}+np^n}$.

(b) La somme $\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}$ correspond à la somme partielle de la série géométrique dérivée de raison p qui converge car $p \in]0,1[$ et dont on connaît la somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}=\frac{1}{(1-p)^2}=\frac{1}{q^2}$$

Comme, par croissance comparée $np^n \to 0, n \to +\infty$, il s'ensuit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} E\left(X_n\right)=qp \times \frac{1}{q^2}=\frac{p}{q}}.$$

□

Problème 2 **EDHEC 2024**

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel.

On pose $u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx$ et on a en particulier $u_0=\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx$.

1. (a) Déterminer les réels a et b tels que : $\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{4-x^2}=\frac{a}{2-x}+\frac{b}{2+x}$.

   (b) En déduire que $u_0=\frac{1}{4}\ln(3)$.

2. Calculer u_1.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_n-u_{n+2}=\frac{1}{n+1}$.

4. On considère le programme suivant :

```
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u = np.log(3) / 4
        for k in range(2,n + 1,2) :
            u = 4 * u - ...
    else :
        u = np.log(2 / np.sqrt(3))
```

```
        for k in range(3,n + 1,2) :
            u = 4 * u - ...
    return u
```

(a) Qu'est ce que permet de tester sur l'entier n la condition

```
if (-1)**n == 1
```

(b) Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

5. (a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}.$$

(b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(c) La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

6. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx.$$

(b) Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx = 0.$$

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3nu_n = 1$.

On dit alors que u_n est équivalente à $\frac{1}{3n}$ au voisinage de l'infini.

Solution. 1. (a) Soit $x \in [0,1]$, et a, b deux réels.

On a :

$$\frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{a(2+x)+b(2-x)}{4-x^2} = \frac{2(a+b)+(a-b)x}{4-x^2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} &\iff \forall x \in [0,1],\ 1 = 2(a+b)+(a-b)x\\ &\iff 1 = 2(a+b) \text{ et } a-b=0\\ &\iff \boxed{a = b = \frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

(b) En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx\\ &= \int_0^1 \frac{1}{4(2-x)}dx + \int_0^1 \frac{1}{4(2+x)}dx\\ &= \frac{1}{4}\left([-\ln(2-x)]_0^1 + [\ln(2+x)]_0^1\right)\\ &= \frac{\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)}{4}\\ &= \boxed{\frac{\ln(3)}{4}}.\end{aligned}$$

2. Pour calculer u_1, il suffit de remarquer qu'une primitive de $\frac{x}{4-x^2}$ est la fonction définie

sur $[0,1]$ par $x \mapsto -\dfrac{\ln(4-x^2)}{2}$.
On a donc :

$$u_1 = \left[-\frac{\ln(4-x^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{-\ln(3)+\ln(4)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 4u_n - u_{n+2} &= \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N},\ 4u_n - u_{n+2} = \frac{1}{n+1}.}$

4. (a) Cette condition teste si n est pair ou non. En effet si n est pair alors $(-1)^n = 1$ et si n est impair alors $(-1)^n = -1 \neq 1$.

   (b) D'après la question précédente, on a pour tout entier n : $u_{n+2} = 4u_n - \dfrac{1}{n+1}$. Le programme calcule les termes de u_n par récurrence en incrémentant n de 2 à chaque étape.
   Si n est pair, on calcule u_n en utilisant la formule de récurrence et en partant de u_0. Si n est impair, on fait de même en partant de u_1.

```
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2, n+1, 2) :
            u = 4*u-1/(n-1)
    else :
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3, n+1, 2) :
            u = 4*u-1/(n-1)
    return u
```

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$3 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

Par décroissance de la fonction inverse puis en multipliant par $x^n \in [0,1]$, on obtient :

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{x^n}{3}.$$

Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), on a donc :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3}dx.$$

Après calcul des deux intégrales au bord, on en déduit que :

$$\boxed{\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}}.$$

(b) La suite (u_n) est encadrée par les suites $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{3(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes les deux vers 0. D'après le théorème d'encadrement, on conclut que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge aussi vers } 0}$.

(c) On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n.$
- $\sum \frac{1}{4(n+1)}$ diverge (faire un changement d'indice dans la somme partielle pour se ramener au terme général d'une série harmonique divergente (car Riemann avec $\alpha = 1$).

Par le théorème de comparaison de séries à terme positifs on en déduit que $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

6. (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose :

$$\begin{cases} u'(x) = x^n & \Leftarrow \quad u(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \\ v(x) = \dfrac{1}{4-x^2} & \Rightarrow \quad v'(x)\dfrac{2x}{(4-x^2)^2} = \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

D'après la formule d'intégration par partie, on a alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)}\right]_0^1 - \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx \\ &= \boxed{\frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx}. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En procédant de la même matière qu'à la question **5)a)**, on peut montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9}dx.$$

On a alors :

$$\frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx \leq \frac{1}{9(n+3)}.$$

Ainsi, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx \leq \frac{1}{9(n+3)}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{16(n+3)} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{9(n+3)} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} = 0}.$$

7. On a :

$$3nu_n = \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{6n}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

Or, on a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n}{3(n+1)} = 1$ (en factorisant par les termes dominants)
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6n}{(n+1)} = 6$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} = 0$

D'où par produit et somme de limite, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 3nu_n = 1.}$

$\square$

Problème 3 **EML 2023**

Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien défini et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Informatique.
   (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
from numpy import exp
u=1
n=0
while ........ :
u=exp(-u)/u
n=........
return n
```

   (b) On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc_2(a):
from numpy import exp
u=1
n=0
while u>a:
u=exp(-u)/u
n=n+1
return n
```

   Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
   Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
   Commenter ce résultat en une ligne.

   (c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.
3. Pour $x \in [0; +\infty[$ on pose $g(x) = e^{-x} - x^2$.
   (a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; 1]$.
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$, que l'on notera α.

(c) Justifier que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $e \approx 2{,}7$.

(d) Écrire un programme Python permettant de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

   (b) En déduire par récurrence que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0;+\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

   (a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

   (b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0;+\infty[$.

   (c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question 3.(b).

   (d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Solution. 1. (a) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Or, $x + 1 > 0$ (car $x > 0$), $e^{-x} > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[}$.

Pour le calcul des limites il n'y a pas de forme indéterminée.
On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

D'où par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Par ailleurs, on a :

- $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} x = 0_+$

D'où par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$.

D'où le tableau de variations de f suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

(b) Montrons par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».
Initialisation :
$u_0 = 1$ d'après l'énoncé. D'où $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire u_n est bien défini et $u_n > 0$.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire « u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} > 0$ » :
Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$. En particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de f, donc $f(u_n)$ est bien défini, i.e u_{n+1} est bien défini.
De plus, d'après les variations de fonction f étudiées à la question précédente, on a $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
Or par HR, $U_n > 0$.
Donc $f(u_n) > 0$ et donc $u_{n+1} > 0$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Par le principe de récurrence on en déduit que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2. (a) On calcule les termes successifs de la suite jusqu'à avoir $u_n > a$, c'est-à-dire tant que $u_n \leq a$. D'où le programme :

```
def fonc_1(a):
from numpy import exp
u=1
n=0
while u<=a:
u=exp(-u)/u
n=n+1
return n
```

(b) La commande `fonc_2(a)` renvoie le plus petit n tel que $u_n \leq a$.
Par conséquent, les termes $u_0, \ldots, u_4$ sont tous compris dans l'intervalle $]10^{-6}; 10^6]$. Par contre, $u_5 \leq 10^{-6}$ et $u_6 > 10^6$. Il semblerait que la suite (u_n) alterne des très grand termes avec des très petits termes.

(c) Programme classique.

```
def suite(n):
from numpy import exp
u=1
for k in range(n):
u=exp(-u)/u
return u
```

3. (a) La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables et pour tout $x \geq 0$, on a $g'(x) = -e^{-x} - 2x = -(e^{-x} + 2x)$. Or, $e^{-x} > 0$ et $2x \geq 0$, donc $g'(x) < 0$.
Par conséquent, g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
De plus, g est continue sur cet intervalle (puisqu'elle y est dérivable).
Donc, par le théorème de la bijection,on en déduit que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $g([0; +\infty[) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} g(x); g(0) \right]$.
Or, on a directement $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi } g \text{ réalise une bijection (strictement décroissante) de } [0; +\infty[\text{ sur }]-\infty; 1]}$.

(b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Longleftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\Longleftrightarrow e^{-x} = x^2 \\ &\Longleftrightarrow e^{-x} - x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; 1]$, et 0 appartient à l'intervalle image $]-\infty; 1]$.
Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
De plus, $\alpha \neq 0$ car $g(0) \neq 0$.

$\boxed{\text{Ainsi l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans l'intervalle }]0; +\infty[.}$

(c) On a $g(1) = e^{-1} - 1$.
Or, $e > 2$, donc $e^{-1} < \dfrac{1}{2}$, donc en particulier $e^{-1} < 1$.
Par conséquent, $g(1) < 0$.

De même, $g\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(\frac{-1}{e}\right) - \exp(-2)$.
Or, comme vu ci-dessus, $\frac{1}{e} < 1$, et donc en particulier, $\frac{1}{e} < 2$.
D'où $\frac{-1}{e} > -2$, et donc (par stricte croissance de la fonction exponentielle) $\exp\left(\frac{-1}{e}\right) > \exp(-2)$.
On en déduit que $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$.

Ainsi, on a $g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$.

Et donc, par stricte décroissance de g sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $\boxed{\dfrac{1}{e} < \alpha < 1.}$

4. (a) On a $u_1 = f(u_0) = e^{-1}$.
Comme $e > 2$, on en déduit que $u_1 < \dfrac{1}{2}$.
Par conséquent, par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on a $f(u_1) > f\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $u_2 > 2e^{-1/2}$.
Or, $e < 4$, donc $e^{1/2} < 2$, donc $e^{-1/2} > \dfrac{1}{2}$ et donc $2e^{-1/2} > 1$.

$\boxed{\text{En conclusion } u_2 > 1, \text{ c'est-à-dire } u_2 > u_0.}$

Les questions plus subtiles commencent ici.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{2n}$.
Montrons par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $v_{n+1} > v_n$.
Initialisation :
D'après la question précédente, on a $u_2 > u_0$, soit $v_1 > v_0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $v_{n+1} > v_n$.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $v_{n+2} > v_{n+1}$.
Par HR, $v_{n+1} > v_n$, soit $u_{2n+2} > u_{2n}$.
Par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$.
De même, par stricte décroissance de f, on en déduit alors que $f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1})$, soit $u_{2n+4} < u_{2n+2}$ c'est à dire $v_{n+2} > v_{n+1}$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :
Par le principe de récurrence on en déduit que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} > v_n$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n) \text{ et donc } (u_{2n}), \text{ est strictement croissante}}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = u_{2n+1}$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+2} > u_{2n}$.
Par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, ou encore $w_{n+1} < w_n$.
Ainsi, la suite (w_n), c'est-à-dire la suite (u_{2n+1}), est strictement décroissante.
Comme par ailleurs, elle est minorée par 0 ($u_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après la question 1.(b)), on en déduit, par le théorème de convergence monotone que $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1}) \text{ est convergente}}$.

5. (a) Pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, donc la composée $h(x) = f(f(x))$ a bien un sens.
De plus,

$$\begin{aligned} h(x) &= f(f(x)) \\ &= \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= \frac{x\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{e^{-x}} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x > 0,\ h(x) = xe^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}$.

(b) D'après la question 1.(a), la fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $]0; +\infty[$.
Par conséquent, $f \circ f$ est continue sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues.
Autrement dit, h est continue sur $]0; +\infty[$.
Examinons maintenant la continuité de h (à droite) en 0.
D'après la question précédente, on a, pour tout $x > 0$, $h(x) = xe^x \exp(-f(x))$.
Or, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $-f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\exp(-f(x)) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
De plus, $xe^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
D'où $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} h(0)$.
Donc h est continue (à droite) en 0.

$\boxed{\text{Conclusion : la fonction } h \text{ est continue sur } [0; +\infty[.}$

(c) On sait déjà que 0 est solution de $h(x) = x$ puisque $h(0) = 0$ par définition de $h(0)$.
Cherchons maintenant les solutions strictement positives.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff xe^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = x \quad \text{(question 5.(a))} \\ &\iff e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = 1 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\iff \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = e^{-x} \\ &\iff \frac{-e^{-x}}{x} = -x \quad \text{par injectivité de la fonction } \exp \\ &\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\iff f(x) = x \\ &\iff x = \alpha \quad \text{(question 3.(b))} \end{aligned}$$

Ainsi, il y a une unique solution strictement positive, qui est α.

$\boxed{\text{Conclusion : l'équation } h(x) = x, \text{ d'inconnue } x, \text{ admet exactement deux solutions sur } [0;+\infty[, \text{ qui son}}$

(d) Reprenons les notations de la question 4.(c) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(w_n)$.
Notons ℓ la limite de (w_n) (qui existe d'après la question 4.(c)), et passons à la limite dans l'égalité $w_{n+1} = h(w_n)$.
On obtient alors, par continuité de h sur $[0;+\infty[$ (cf question 5.(b)) : $\ell = h(\ell)$.
Par conséquent, d'après la question précédente, $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.

Montrons que $\ell \neq \alpha$. Le premier terme de la suite (w_n) est $w_0 = u_1 = f(u_0) = f(1)$.
Or, comme $\alpha < 1$ (cf question 3.(c)), on a, par stricte décroissance de f : $f(\alpha) > f(1)$, soit $\alpha > w_0$.
Ainsi, la suite (w_n) est strictement décroissante (cf question 4.(c)), et de premier terme strictement inférieur à α. Elle ne peut pas converger vers α.
Par conséquent, ℓ est nécessairement égal à 0.

$\boxed{\text{Conclusion : la suite } (u_{2n+1}) \text{ converge vers } 0.}$

6. La suite (u_{2n}) est croissante (cf question 4.(b)).
Donc, par le théorème de la limite monotone : soit elle est majorée, et dans ce cas elle converge, soit elle ne l'est pas, et dans ce cas diverge vers $+\infty$.
Par l'absurde, supposons qu'on soit dans le premier cas (suite majorée et convergente).
Notons ℓ' sa limite.
De même qu'à la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n})$.
D'où, en passant à la limite : $\ell' = h(\ell')$, et donc (cf question 5.(c)) $\ell' = 0$ ou $\ell' = \alpha$.
Or, (u_{2n}) est croissante, de premier terme u_0, qui est strictement supérieur, à la fois à 0 et à α.
Elle ne peut donc pas converger, ni vers 0, ni vers α, ce qui contredit ce qui précède.
On n'est donc pas dans le cas où (u_{2n}) est majorée et convergente.

$\boxed{\text{Conclusion : la suite } (u_{2n}) \text{ n'est pas majorée, et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty.}$

□

Problème 4

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.

Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A **avant** de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B **avant** de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire lorsque B commence, on a donc $Y = 0$).
Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;
- X vaut 1 et Y vaut 4.

On pourra se servir, durant tout l'exercice, des événements suivants :

— A_i : « le joueur A tire une boule blanche lors de son $i^{\text{ème}}$ tirage »
— B_i : « le joueur B tire une boule blanche lors de **son** $i^{\text{ème}}$ tirage »

Les parties I et II sont indépendantes. La partie II contient des raisonnements costauds et des calculs techniques.

I. Étude d'un cas particulier $b = n = 2$.

On considère ici le cas particulier où l'urne contient 2 boules noires et 2 boules blanches.
Pour ce cas particulier on pourra s'aider d'un arbre pondéré, mais une bonne rédaction sera tout de même nécessaire.

1. Donner les probabilités des évènements : $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$.
2. En déduire l'espérance de X et vérifier que la variance de X vaut $\dfrac{5}{9}$.
3. Montrer, par la formule des probabilités totales, que la probabilité de l'évènement $[Y = 0]$ est donnée par : $P([Y = 0]) = \dfrac{1}{2}$
4. Pour tout entier i naturel **non nul**, déterminer les probabilités suivantes :

   $P([X = 0] \cap [Y = i])$, $\quad P([X = 1] \cap [Y = i])$, $\quad P([X = 2] \cap [Y = i])$.
5. En déduire que, pour tout entier i naturel **non nul**, $P([Y = i]) = \dfrac{1}{6}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^i + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i\right)$.

   Vérifier que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y = i]) = 1$.
6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

BONUS

II. Retour au cas général.

1. Pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$ calculer la probabilité $P([X = k])$, puis vérifier que :
   $P([X = k]) = \dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$.

2. Utiliser la question qui précède pour justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}$.
Indication : on pourra utiliser le changement d'indice $k\leftarrow n-k$.
Par conséquent on vient de démontrer la formule :
$(\mathcal{S})\qquad \forall N\in\mathbb{N},\ \forall a\in\mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{k+a}{a}=\binom{N+a+1}{a+1}.$
3. Soient $k\geqslant 1$, $N\geqslant 1$ et $a\in\mathbb{N}$. Démontrer que $k\binom{k+a}{a}=(a+1)\binom{k+a}{a+1}$ puis justifier que :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{N}k\binom{k+a}{a}=\sum_{k=1}^{N}k\binom{k+a}{a}=(a+1)\sum_{k=0}^{N-1}\binom{k+a+1}{a+1}$.
4. À l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variable $n-X$ est donnée par : $E(n-X)=\dfrac{nb}{b+1}$.
En déduire l'espérance de X, notée $E(X)$.
5. Démontrer que $P_{[X=k]}([Y=i])=\left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i}\dfrac{b-1}{n-k+b-1}$ pour $i\geq 0$ et $k\in[0;n-1]$.
Calculer également $P_{[X=n]}([Y=0])$ et enfin $P_{[X=n]}([Y=i])$ pour $i\geq 1$.
6. Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i, non nul, justifier que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ est convergente et déterminer sa somme.
7. Montrer que Y admet une espérance et vérifier que : $E(Y)=\dfrac{bn}{b^2-1}$.

Solution. **Exercice complet et progressif, calculs finaux costauds**

I.Etude d'un cas particulier $b=n=2$

1. En introduisant les évènements élémentaires classiques B_i :"tirer une boule blanche au ième tirage" et N_i :"tirer une boule noire au ième tirage", il vient :
$[X=0]=B_1$.
Donc $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ (boules présentent équiprobables)
$[X=1]=N_1\cap B_2$.
Donc $\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(N_1)\mathrm{P}_{N_1}(B_2)=\dfrac{2}{4}\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$
$[X=2]=N_1\cap N_2\cap B_3$.
Donc $\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(N_1)\mathrm{P}_{N_1}(N_2)\mathrm{P}_{N_1\cap N_2}(B_3)=\dfrac{2}{4}\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{6}$
2. On vérifie la cohérence :

k	0	1	2	
$\mathrm{P}(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\sum=1$
$k\,\mathrm{P}(X=k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$E(X)=\frac{2}{3}$
$k^2\,\mathrm{P}(X=k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$E(X^2)=1$

et $\boxed{V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\dfrac{5}{9}}$.
3. Les tirages de B dépendent de ceux de A.
On utilise donc la formule des probabilités totales, avec le sce $([X=k])_{k\in\{0;1;2\}}$ de proba-

bilités non nulles, pour en déduire que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=0) &= \mathrm{P}(X=0)\,\mathrm{P}_{X=0}(Y=0)+\mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}_{X=1}(Y=0)+\mathrm{P}(X=2)\,\mathrm{P}_{X=2}(Y=0)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 1\\
&= \frac{3}{6}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4. Calcul de les probabilités $P([X=0]\cap[Y=i])$, $P([X=1]\cap[Y=i])$, $P([X=2]\cap[Y=i])$.

   On remarque que pour $k\in\{0;1;2\}$, la réalisation de l'évènement $X=k$ signifie qu'au tour de B de faire des tirages l'urne contient $2-k$ boule noires (X est le nombre de boules noires tirées par A) et 1 boule blanche.
   Donc pour $i\in\mathbb{N}$,
   $$P_{[X=k]}([Y=i])=\left(\frac{2-k}{3-k}\right)^{i}\frac{1}{3-k}$$
   qui est la probabilité de faire i tirages d'une noire suivi d'un tirage d'une blanche (les tirages étant avec remise).
   Ensuite, par la formule des probas conditionnelles, on en déduit que
   $$P([X=k]\cap[Y=i])=P([X=k])\,P_{[X=k]}([Y=i])=P([X=k])\left(\frac{2-k}{3-k}\right)^{i}\frac{1}{3-k}.$$
   Finalement,
   $$\boxed{\begin{aligned}
   &P([X=0]\cap[Y=i])=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\frac{1}{3}\\
   &P([X=1]\cap[Y=i])=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\frac{1}{2}\\
   &P([X=2]\cap[Y=i])=\frac{1}{6}\times\left(\frac{0}{1}\right)^{i}\frac{1}{1}
   \end{aligned}}$$

5. En utilisant la formule des probabilité totales avec le système complet d'évènements $([X=k])_{k\in\{0;1;2\}}$ de probabilités non nulles, on en déduit que :
   $$\begin{aligned}
   \forall i\geq 1,\ P([Y=i]) &= P([X=0]\cap[Y=i])+P([X=1]\cap[Y=i])+P([X=2]\cap[Y=i])\\
   &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{0}{1}\right)^{i}\frac{1}{1}\\
   &= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{i}+\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\right]
   \end{aligned}$$
   On a donc une expression différente pour $Y=0$:

   Conclusion : $\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{P}(Y=0)=\frac{1}{2}\\ &\text{et pour } i\geq 1 : \mathrm{P}(Y=i)=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{i}+\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\right]\end{aligned}}$

   On en déduit alors que :
   $$\begin{aligned}
   \sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}(Y=i) &= \frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{i}+\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\right]\\
   &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\\
   &\to \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}+\frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1
   \end{aligned}$$

6. $E(Y)$ existe si et seulement si $\sum_{i\geq 0} i\,\mathrm{P}(Y=i)$ converge absolument.
Or, ici, la convergence absolue de $\sum_{i\geq 0} i\,\mathrm{P}(Y=i)$ équivaut à la convergence simple (car tout est positif).
Soit $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i\,\mathrm{P}(Y=i) &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i} + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i} \\
&= \frac{1}{6}\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\
&\to \frac{1}{6}\frac{\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^{2}} + \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

car les séries $\sum_{i\geq 1} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ et $\sum_{i\geq 1} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ convergent, car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$
Donc la série est absolument convergente.
Conclusion : $\boxed{Y \text{ a une espérance et } E(Y) = \frac{4}{3}}$

II. Retour au cas général.

1. On a $X(\Omega) = [[0,n]]$
Et pour $k \in [[0,n]]$, $(X=k) = N_1 \cap \cdots \cap N_k \cap B_{k+1}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=k) &= \mathrm{P}(N_1)\cdots \mathrm{P}_{N_1\cdots N_{k-1}}(N_k) \times \mathrm{P}_{N_1\cdots N_{k-1}}(B_{k+1}) \\
&= \frac{n}{n+b}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+b}\times\frac{b}{n-k+b}
\end{aligned}$$

car le conditionnement donne le nombre de boules noires restantes.
On le réécrit avec des factorielles :

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{\frac{(n+b)!}{(n-k+b-1)!}}b = \frac{n!\,(n-k+b-1)!}{(n+b)!\,(n-k)!}b$$

que l'on compare à la forme proposée :

$$\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = \frac{\frac{(n-k+b-1)!}{(b-1)!(n-k)!}}{\frac{(n+b)!}{b!n!}} = \frac{b!n!\,(n-k+b-1)!}{(n+b)!\,(b-1)!\,(n-k)!} = \mathrm{P}(X=k)$$

car $b! = (b-1)!b$.
En conclusion, $\boxed{\forall k \in [\![0;n]\!],\ P(X=k) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}}$.

2. Comme X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = [[0,n]]$, on a donc $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X=k) = 1$
et comme $\binom{n+b}{b}$ est constante par rapport à k, on peut factoriser hors de la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$$

que l'on réindexe en effectuant le changement de variable $h = n - k$ **qui inverse l'ordre d'indexation**

$$\boxed{\sum_{h=0}^{n} \binom{h+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}}$$

3. Soient $k \geq 1$ et $N \geq 1$ alors $k! = k\,(k-1)!$ car $k - 1 \geq 0$ et

$$\begin{aligned} k\binom{k+a}{a} &= k\frac{(k+a!)}{a!k!} = \frac{(k+a!)}{a!\,(k-1)!} \\ &= (a+1)\,\frac{(k+a!)}{(a+1)!\,(k-1)!} \\ &= (a+1)\binom{k+a}{a+1} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} &= 0 + \sum_{k=1}^{N} (a+1)\binom{k+a}{a+1} \\ &= (a+1)\sum_{h=0}^{N-1} \binom{h+a+1}{a+1} \text{ par le changement de variable } h = k-1 \end{aligned}$$

et on substitue $N - 1$ à N et $a + 1$ à a dans la formule ci dessus pour obtenir :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{N+a+1}{a+2}}$$

4. **Question subtile**

Par le théorème de transfert : $E\,(n-X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)\,\mathrm{P}\,(X=k)$ ne fait pas apparaître la somme précédente.

On revient donc à la définition $E\,(n-X) = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} h\,\mathrm{P}\,(n-X=h)$ car $(n-X)\,(\Omega) = [0,n]$

$$\begin{aligned} E\,(n-X) &= \sum_{h=0}^{n} h\,\mathrm{P}\,(X=n-h) \\ &= \sum_{h=0}^{n} h\frac{\binom{h+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \text{ et avec } a = b-1 \\ &= \binom{n+b}{b}^{-1} \sum_{h=0}^{n} h\binom{h+b-1}{b-1} \\ &= \binom{n+b}{b}^{-1} b\binom{n+b}{b+1} \\ &= \frac{b!n!}{(n+b)!} b \frac{(n+b)!}{(b+1)!\,(n-1)!} \\ &= \frac{nb}{b+1} \text{ car } n! = n\,(n-1)! \end{aligned}$$

et comme $E\,(n-X) = n - E\,(X)$, on en conclut que

$$\boxed{E\,(X) = n - \frac{nb}{b+1} = \frac{n}{b+1}}$$

5. Quand $X = k$, il reste $n-k$ boules noires et $b-1$ boules blanches pour les tirage du joueur B
Tant qu'il n'a pas eu de boule blanche, la probabilité de tirage de blanche est de $\dfrac{b-1}{n-k+b-1}$
Le nombre de tirages de B pour obtenir la première blanche $Y+1$ est donc sans mémoire.
et $Y+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{b-1}{n-k+b-1}\right)$ soit $\mathrm{P}_{X=k}(Y=i) = \left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \dfrac{b-1}{n-k+b-1}$ et cela même pour $i=0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{P}(X=k\cap Y=i) = \dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}\left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \dfrac{b-1}{n-k+b-1} \text{ pour } i\geq 0 \text{ et } k\in[[0,n-1]]\\ \mathrm{P}(X=n\cap Y=0) = \dfrac{1}{\binom{n+b}{b}} \text{ et } \mathrm{P}(X=n\cap Y=i)=0 \text{ si } i\geq 1\end{array}}$$

6. $0 \leq q = \dfrac{n-k}{n-k+b-1} < 1$ donc la série $\sum_{i\geq 1} iq^{i-1}$ converge et

$$\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \left(\frac{n-k+b-1}{b-1}\right)^2$$

7. **Question digne de ESSEC II :**
Par la formule des probabilités totales avec $(X=k)_{k\in[[0,n]]}$ comme système complet d'événements,

$$\mathrm{P}(Y=i) = \mathrm{P}(X=n\cap Y=i) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X=k\cap Y=i)$$

que l'on ne cherche pas à expliciter...mais on utilisera plutôt les questions précédentes.
donc, et (convergence absolue partout)

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\left[\mathrm{P}(X=n\cap Y=i) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X=k\cap Y=i)\right]\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} i\,\mathrm{P}(X=n\cap Y=i) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{+\infty} i\,\mathrm{P}(X=k\cap Y=i)\\
&= 0 + \sum_{i=1}^{+\infty} 0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{P}(X=k)\sum_{i=0}^{+\infty} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}\overbrace{\frac{n-k}{n-k+b-1}\,\frac{b-1}{n-k+b-1}}^{\text{constante } /\ i}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X=k)\,\frac{(n-k)(b-1)}{(n-k+b-1)^2}\left(\frac{n-k+b-1}{b-1}\right)^2\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X=k)\,\frac{n-k}{b-1}\\
&= \frac{1}{b-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X=k)(n-k)\\
&= \frac{1}{b-1}E(n-X) \quad \text{(transfert !)}\\
&= \frac{1}{b-1}\,\frac{bn}{b+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } E(Y) = \frac{bn}{b^2-1}}$$

□