Méthode

Savoir calculer des probabilités sur un univers fini

1. Comment modéliser une expérience aléatoire ?

- **Commencez par introduire les événements dont on a besoin.** Pensez à leur donner des noms évocateurs.
S'il y a une chronologie les noms des évènements doivent en dépendre : (par exemple on note B_1 : "obtenir une boule blanche au 1er tirage" et B_2 : "obtenir une boule blanche au 2ème tirage").
- **Traduisez la question de l'énoncé à l'aide de ces événements :** union - intersection - probabilité conditionnelle.

Vocabulaire aléatoire	Notation ensembliste
A n'est pas réalisé	$\overline{A}$
Les évenements A et B sont réalisés	$A \cap B$
L'évenement A ou B est réalisé	$A \cup B$
Les événements A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$

- **Calculez la probabilité demandée** en utilisant les théorèmes du cours.

Attention ! Il ne faut pas confondre le langage des événements et celui des probabilités. Ainsi, si A et B sont des événements,

il ne faut surtout pas écrire $P(A) \cup P(B)$ **mais** $P(A \cup B)$.

2. Savoir donner l'univers

Voici quelques exemples

1. Lancé d'un dé : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Lancé de deux dés successivement : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. Savoir montrer que deux évènements sont indépendants

- L'indépendance peut être une propriété de l'énoncé (tirages successifs avec remise, dans des conditions identiques, etc.)
- Sinon montrer une des propriétés suivantes :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad ou \quad P_A(B) = P(B)$$

4. Savoir calculer une union d'évènements

$\boxed{\text{Calcul de } P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)}$

1. **Si les évènements $(A_i)_i$ sont incompatibles**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

   Ex : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. **Si les évènements $(A_i)_i$ sont indépendants**, l'astuce consiste à passer par l'évènement **contraire**,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

   Ex : $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - (P(\overline{A})P(\overline{B}))$

3. **Sinon**, on peut essayer d'utiliser la **formule du crible de Poincaré** lorsque $n \leq 3$.
   Ex : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. Savoir calculer une intersection d'évènements

$\boxed{\text{Calcul de } P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)}$

1. **Si les $(A_i)_i$ sont indépendants**

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

   Ex : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

2. **Sinon**, on utilise la **formule des probabilités composées**

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1}}(A_n).$$

   Ex : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

Exemple 1 :

On lance une pièce non truquée n fois. Quelle est la probabilité d'obtenir n fois pile ?

Solution :

Notons A l'évènement "obtenir n fois pile".
Notons P_k l'évènement "obtenir un pile au k ème lancer", pour tout $k \in \mathbb{N}$,.
On a $A = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_k$.
D'où, $P(A) = P(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_k)$.
Les lancers étant mutuellement **indépendants**, on en déduit que

$$P(A) = P(P_1) \times \ldots \times P(P_k) = \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Exemple 2 :

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?

Solution :
Notons A l'événement : "on obtient 3 boules blanches".
Notons B_k, resp. N_k, l'événement : "le k^{ie} tirage donne une boule blanche (resp. noire)", pour tout $k \in \{1, 2; 3\}$.
On a $A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$.
D'où, $P(A) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$.
Attention, ici ***il n'y a pas indépendance car il n'y a pas remise****, donc le contenu de l'urne dépend à chaque fois du tirage précédent.*
D'après la **formule des probabilités composées avec** $P(B_1 \cap B_2) \neq 0$,

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3).$$

On a $P(B_1) = 3/10$ par équiprobabilité (le tirage se faisant au hasard), car l'urne contient 10 boules dont 3 blanches.
A l'issue du premier tirage, l'urne contient 9 boules et si le première boule tirée est blanche, il ne reste que 2 boules blanches.
Donc $P_{B_1}(B_2) = 2/9$.
A l'issue du 2^{ie} tirage, l'urne contient 8 boules dont une seule blanche, si l'on sait que les deux boules tirées étaient blanches.
Donc $P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = 1/8$.
Finalement, $P(A) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{120}$.

6. Savoir utiliser la formule des probabilités totales

- **Quand ?** La formule des probabilités totales s'utilise lorsqu'à la question : « quelle est la probabilité de l'évènement B » on répond « ça dépend ».
  Le SCE adapté est alors l'ensemble des événements qui permettent de décrire les différentes possibilités par disjonction des cas ("soit", "soit", ...).
- **Comment ?** Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un *système complet d'événements* de Ω de proba non nulles. Alors pour tout événement B,

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{aligned}}$$

Exemple :
Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est alors la probabilité d'obtenir une boule noire au 2^{ie} tirage ?
Solution :
Notons B_k, resp. N_k, l'événement : "le k^{ie} tirage donne une boule blanche (resp. noire)", pour tout $k \in \{1, 2; 3\}$.
Il s'agit de calculer $P(N_2)$.
Pour calculer cette probabilité, il faut connaître la composition de l'urne juste avant ce deuxième tirage, c'est-à-dire la composition de l'urne à l'issue du premier tirage.
$\{N_1, B_1\}$ **forment un système complet d'évènements tous de probabilités non nulles. D'où en appliquant la formule des probabilités totales avec ce s.c.e., on en déduit que :**

$$P(N_2) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) + P(N_1)P_{N_1}(N_2).$$

Or, $P(B_1) = \dfrac{3}{10}$, $P(N_1) = \dfrac{7}{10}$, $P_{B_1}(N_2) = \dfrac{7}{9}$ et $P_{N_1}(N_2) = \dfrac{6}{9}$.
D'où $P(N_2) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{9} + \dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{7}{10}$.

7. Savoir utiliser la formule de Bayes

- **Quand ?** On utilise la formule de Bayes lorsque l'on fait une constatation à posteriori (c'est à dire à l'issue de l'expérience) et qu'on nous demande la probabilité d'un évènement à priori (c'est à dire au début de l'expérience).
- **Comment ?** Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. On a :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_A(B)\frac{P(A)}{P(B)}}.$$

Exemple :

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire successivement 3 boules sans remise. Le second tirage ayant donné une boule blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

Solution :

Notons B_k, resp. N_k, l'événement : "le k^{ie} tirage donne une boule blanche (resp. noire)", pour tout $k \in \{1, 2; 3\}$.
Il s'agit de calculer $P_{B_2}(B_1)$.
Et donc de remonter dans le passé sachant le présent.
Or $P(B_1) \neq 0$ et $P(B_2) \neq 0$.
D'où, **en appliquant la formule de Bayes, il vient :**

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(B_1)P_{B_1}(B_2)}{P(B_2)}$$

avec $P(B_2) = \dfrac{3}{10}$ (déjà calculé à l'exercice précédent car $P(B_2) = 1 - P(N_2)$) ou sinon on le recalcule à l'aide de la formule des probas totales.
En conclusion,

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{\dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{2}{9}.$$

8. Processus de Markov

On parle de processus de Markov lorsque dans une expérience un système peut se trouver dans plusieurs états et si le système évolue d'instants en instants de telle sorte que la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donné l'instant présent, ne dépend que de l'état présent et pas des états passés.

Exemple :

Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Deux sociétés sont utilisées : la société A et la société B. La probabilité pour que la société A livre le colis en retard est de $0,1$ alors que la probabilité que la société B livre le colis en retard est de $0,2$.

Il est décidé que le premier jour, l'entreprise utilise la société B. Puis si au jour $n, (n \geq 1)$, le colis arrive en retard, alors l'entreprise choisit la société A au jour $n+1$, et sinon, elle choisit la société B. On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'événement R_n : " le colis arrive en retard au jour n", et on note $p_n = P(R_n)$.

1. Déterminer p_1.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1, p_{n+1} = -0,1p_n + 0,2$.
3. En déduire p_n en fonction de n. Quelle est la limite notée α de p_n ?

Solution :

1. Le premier jour, le colis est livré par l'entreprise B donc a une probabilité 0.2 d'arriver en retard d'où $\boxed{p_1 = 0.2.}$
2. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $\{R_n, \overline{R_n}\}$ tous de probabilités non nulles, il vient :
$$P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n})P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$$
soit encore
$$P(R_{n+1}) = P(R_n) * 0.1 + P(\overline{R_n}) * 0.2$$
car sachant R_n, au jour $n+1$ le colis est livré par la société A donc arrive en retard avec probabilité 0.1 alors que sachant $\overline{R_n}$ il est livré par la société B donc arrive en retard avec probabilité 0.2.
On utilise alors la notation $p_n = P(R_n)$ donc $P(\overline{R_n}) = 1 - P(R_n) = 1 - p_n$ et $P(R_{n+1}) = p_{n+1}$.
D'où $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ p_{n+1} = 0.1p_n + 0.2(1 - p_n) = -0.1p_n + 0.2.}$
3. La suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique.
On trouve son expression explicite, en appliquant la méthode classique vue en cours. On obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = (-0.1)^{n-1}(p_1 - \ell) + \ell$$
avec $\ell = \dfrac{2}{11}$ et $p_1 = 0.2$.
D'où
$$p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell = \frac{2}{11}$$
car $-1 < -0.1 < 1$.

9. Un dernier exercice pour la route

On dispose de trois urnes contenant chacune cinq boules, rouges ou noires. La première contient 3 rouges et 2 noires, la deuxième 2 rouges et 3 noires et la troisième 1 rouge et 4 noires.
Julien lance un dé bien équilibré.
S'il obtient 1, il extrait au hasard une boule de l'urne 1.
S'il obtient 3 ou 5, il extrait au hasard une boule de l'urne 2.
S'il obtient 2, 4 ou 6, il extrait au hasard une boule de l'urne 3.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne de l'urne 1 ?
2. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

Solution

1. Soient U_k ($k \in \{1, 2, 3\}$), et R respectivement les événements : la boule est extraite de l'urne k et la boule obtenue est rouge. La probabilité cherchée est $P(R \cap U_1)$. En appliquant la **formule des probabilités composées** (car $P(U_1) \neq 0$), on obtient :
$$P(R \cap U_1) = P(U_1) \times P_{U_1}(R)$$
et donc
$$P(R \cap U_1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}.$$

2. **Les événements U_1, U_2 et U_3 forment un système complet d'évènements de Ω et sont tous de probabilités non nulles,** on peut donc appliquer la formule des probabilités totales.
   On a alors : $P(R) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) + P(R \cap U_3)$
   $P(R) = P_{U_1}(R) \times P(U_1) + P_{U_2}(R) \times P(U_2) + P_{U_3}(R) \times P(U_3)$
   d'où $P(R) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.