Méthode
A retenir
Probabilités sur un univers fini

1. A retenir

1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient A, B deux événements. Alors on a :
   (a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
   (b) $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$,
   (c) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$,
   (d) Si $A \cap B = \varnothing$,
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
   Cette formule se généralise facilement à toute famille d'événements 2 à 2 incompatibles.
   (e) Si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements alors $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.
2. **Equiprobabilité**
   Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini de cardinal n en situation d'équiprobabilité Alors
   $$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables (où } A \text{ se réalise)}}{\text{nombre de cas possibles}}$$
3. **Formule des probabilités conditionnelles :**
   Soient A et B deux évènements tels que $P(A) \neq 0$. On a :
   $$\boxed{P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}}.$$
4. **Formule des probabilités composées :**
   (a) Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. On a :
   $$\boxed{P(A \cap B) = P(A) P_A(B)}.$$
   (b) Soient A, B, C 3 événements tels que $P(A \cap B) \neq 0$. On a :
   $$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P_A(B)\, P_{A \cap B}(C)}.$$
5. **Formule des probabilités totales :**
   Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un *système complet d'événements* de Ω, tel que $\forall i \in [1, n], P(A_i) \neq 0$.
   Alors pour tout événement B,
   $$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{aligned}}$$
   en utilisant la formule des probabilités composées pour la dernière égalité.

6. **Formule de Bayes :**

   (a) Soient A et B deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. On a :

   $$\boxed{P_B(A) = P_A(B)\frac{P(A)}{P(B)}}.$$

   et on calcule souvent $P(B)$ à l'aide de la formule des proba totale $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$ ou $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$ avec (A_i) un sce.

7. **Indépendance**
   Deux événements A et B sont indépendants pour P si :

   $$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}.$$

2. Quelques remarques

Les réflexes à avoir pour la rédaction :

1. Lorsque vous introduisez des évènements non définis dans l'énoncé. Ecrire "*On note A l'évènement....*"
2. Précisez toujours le nom des formules que vous utilisez et justifier que les hypothèses d'application de ces formules sont vérifiées. Ecrire "*Par la formule des probabilités totales avec le sce..., par la formule des probabilités composées....*"
3. Ecrire "*par équiprobabilité", on a....*", lorsque vous faites un calcul de probabilité dans une situation d'équiprobabilité.

Les réflexes à avoir pour les calculs de probabilités :

1. "aucun", "tous", "et " $\longrightarrow \bigcap$
2. "au moins", "ou" $\longrightarrow \bigcup$
3. probabilité d'**intersection d'évènements** $\rightarrow$ formule des **probas composées**
4. **manque d'information** (par exemple sur le passé) pour calculer une proba $\rightarrow$ formule des **probas totales** avec un sce faisant intervenir cette information manquante
5. **proba du passé sachant le présent** $\rightarrow$ **formule de Bayes**, que l'on peut voir comme la formule des probas conditionnelles combinée avec la formule des probas totales (pour calculer la probabilité de ce par quoi on conditionne).

Les réflexes à avoir pour la modélisation des situations :

1. tirages s**successifs sans remise** $\rightarrow$ pas d'indépendance, faire un arbre pour se représenter la situation
2. tirage **simultané** $\rightarrow$ situation d'équiprobabilité pour chacun des tirages. Pour le calcul de la proba d'un évènement, on calculera donc le nombre de tirages favorables sur le nombre total de tirages à l'aide des **coefficients binomiaux**.
3. tirages **successifs avec remise** $\rightarrow$ on a **indépendance mutuelle** des tirages.
4. lorsqu'on a à calculer la proba de "**au moins** ....." $\rightarrow$ pensez à regarder la probabilité de l'évènement **contraire**. Notamment lorsqu'il s'agit de 'au moins un', le contraire est "aucun" et est souvent plus facile à calculer (car "au moins un" cela signifie "un, deux,..." et peut nécessiter de passer en revue beaucoup de cas !).

Les errreurs à eviter

Attention à ne pas confondre des évènements **indépendants** (l'un n'influe pas l'autre) et **incompatibles** (les évènements ne peuvent se produire ensemble).

Lorsqu'on a A_i : "**exactement** i..." ou "le **premier**... arrive au i ème lancer", les évènements (A_i) sont incompatibles.