Chapitre 24

Variables aléatoires discrètes

Sommaire

Dans ce chapitre nous allons apprendre à déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète simple, fonction d'une autre, et calculer les moments d'une variable aléatoire discrète. Cette étude se fera en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets et en lien étroit avec l'informatique.

A la fin de ce chapitre, il vous faudra :

- Connaître la définition d'une variable aléatoire.
- Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire (support et probas associées) ou d'une transformée d'une variable aléatoire de loi connue.
- Se souvenir que les $(X = k)_{k\in X(\Omega)}$ forment un sce (d'où $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} P(X = k) = 1$).
- Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de support fini et infini lorsqu'elles existent.
- Connaître et savoir exploiter les propriétés de l'espérance (linéarité, positivité, théorème de transfert) et de la variance (formule de Koenig-Huygens et $V(aX + b) = a^2V(X)$).

On réalise une expérience aléatoire et on considère l'univers $\Omega = \{\text{issues possibles à l'expérience}\}$. On munit Ω d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de Ω (i.e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$), puis on définit une probabilité P sur cet espace.

24.1 Variables aléatoires : introduction

24.1.1 Définition : variable aléatoire

Soit une expérience aléatoire et donc un univers $\Omega = \{\text{ensemble des issues possibles à l'expérience}\}$. Et soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Lorsqu'on étudie une expérience aléatoire sur l'univers Ω, il arrive souvent que ce qui nous intéresse ne soit qu'une partie de l'information donnée par cette expérience aléatoire.

Exemple 24.1.

1. Lancer de 2 dés : on s'intéresse uniquement à la somme des résultats des 2 dés.
2. Familles à 4 enfants : on s'intéresse au nombre de garçons.
3. Appareil technique : on s'intéresse à l'instant de première panne.

Finalement, ce dont nous avons besoin pour notre étude, c'est seulement de la connaissance d'une application qui, à une issue de l'expérience associe la valeur de ce à quoi on s'intéresse.
Reprenons le premier exemple, l'application

$$X : \begin{cases} (1,1) & \to 2 \\ (1,2) & \to 3 \\ (2,1) & \to 3 \\ ... & \to ... \\ (6,6) & \to 12 \end{cases}$$

modélise la situation qui nous intéresse.

Ainsi, à chaque fois, on est en présence d'une application qui à une issue associe un nombre :

$$X : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \\ \omega & \to & \text{réel ou entier} \end{cases}$$

Une telle application est appelée **variable aléatoire**.

Définition 24.1 (Variable aléatoire)

On appelle **variable aléatoire réelle** (notée v.a.r.) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$ toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Remarque 24.190

Le vocabulaire de *variable aléatoire* est usuel mais malheureux. X n'est en réalité pas une variable mais une application. De plus, X n'a rien d'aléatoire (on dit qu'il est déterministe), c'est l'expérience qui est aléatoire.

24.1.2 Support et variable aléatoire discrète

Définition 24.2 (Support)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$.
L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$ et est appelé le **support** de X.

Exemple 24.2. $\Omega = \{$ famille de 4 enfants $\}$ et on s'intéresse au nombre de garçons.
On définit alors une variable aléatoire X égale au nombre de garçons :

$$X : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \\ \omega & \rightarrow & \text{nombre de garçons} \end{cases}$$

Son ensemble image, c'est à dire le support de X, est $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$.

Définition 24.3 (Variable aléatoire finie)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$.
Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble **fini**, on dit que X est une **variable aléatoire réelle finie**.

Exemple 24.3. On lance deux fois de suite un dé équilibré et on considère la variable aléatoire X qui donne la somme des deux nombres obtenus.
Alors $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ est fini.
D'où X est une variable aléatoire est finie.

Remarque 24.191

Lorsque l'on considère des variables aléatoires sur un univers Ω finie, on a forcément $X(\Omega)$ qui est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ et donc la variable aléatoire finie.

Définition 24.4 (Variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A})$.
Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble **discret** (c'est à dire une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$), on dit que X est une **variable aléatoire discrète**.

Remarque 24.192

Toute variable aléatoire finie est une variable aléatoire discrète.

Exemple 24.4. Une pièce amène pile avec une probabilité p ($p \in]0, 1[$) et face avec une probabilité $1 - p$.
On lance indéfiniment cette pièce et on appelle X le numéro du lancer qui donne le premier Pile.
Alors X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (car le premier pile peut apparaître au 1er lancer ou au 2ème ou au 3ème...)
Ainsi X est une variable aléatoire discrète infinie.

Proposition 24.149

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et λ un nombre réel.
Alors $X + Y$, λX, XY, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ sont des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarque 24.193

$\max(X,Y)(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$.
Comme pour le maximum de deux fonctions, en général $\max(X,Y)$ n'est ni égal à X ni à Y.
Selon les issues ω, il vaut $X(\omega)$ ou $Y(\omega)$.

24.1.3 Evènements

Exemple 24.5. On lance deux fois de suite un dé équilibré et on considère la variable aléatoire X qui donne la somme des deux nombres obtenus.
Alors $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ donc $Card(\Omega) = 36$ et $X(\Omega) = [\![2,12]\!]$.
On peut ensuite s'intéresser à l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = 4\}$ que l'on note $[X = 4]$.
On a $[X = 4] = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.
Comme l'expérience est en situation équiprobable, on obtient : $P([X = 4]) = \dfrac{3}{36}$.
On pourrait ainsi calculer toutes les probabilités $P([X = k])$ où $k \in [\![2,12]\!]$ et en faire un tableau :

k		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$		$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

Comme nous le verrons un peu plus loin, ce tableau représente **la loi de** X.

Ainsi, ce qui va nous intéresser par la suite sera de calculer des probabilités relatives à X, en construisant des **événements** à partir de X.
Par définition de la variable aléatoire X, on sait que pour $x \in X(\Omega)$, $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$, c'est à dire qu'il **s'agit d'un événement**. On peut donc en calculer la probabilité.

Pour éviter les surcharges d'écritures, on utilisera les notations usuelles suivantes :

Définition 24.5 (Notations)

On note :

- $[X = x]$ pour $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$
- $[X \in J]$ pour $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in J\}$
- $[a < X \leq b]$ pour $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in]a,b]\}$
- $[X \leq x]$ pour $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in]-\infty,x]\}$

24.1.4 Système complet d'évènements associé à une variable aléatoire

Pour chaque variable aléatoire finie, il est possible de trouver un système complet d'événements au sens de la définition du précédent chapitre de probabilité.

Théorème 24.56 (Système complet d'évènements associés à X)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
Alors la famille $([X = x_i])_{i \in I}$ est un s.c.e. appelé **système complet d'événements associé à X.**

Exercice 24.1. On lance deux fois de suite un dé équilibré et on considère la variable aléatoire X qui donne la somme des deux nombres obtenus. Donner un s.c.e associé à cette variable aléatoire.

24.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ quelconque.
Soit X une variable aléatoire discrète sur cette espace.
On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, où I est inclus dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

24.2.1 Loi de probabilité

Définition 24.6 (Loi de probabilité)

Soit X une variable discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, avec $I \subset \mathbb{N}$.
On appelle **loi de probabilité** de X l'ensemble des couples

$$\{(x_i, p_i), i \in I\}, \quad \text{où } p_i = P([X = x_i]).$$

Ainsi connaître la loi de X c'est connaître toutes les valeurs de X avec les probabilités d'apparition correspondantes.
Ce qui revient à donner les probabilités de chacun des événements du système complet d'événements associé à X.

Autant il n'est pas toujours possible de définir Ω, autant **il est indispensable de préciser** $X(\Omega)$ dès qu'une variable aléatoire X est introduite.

Notation

Pour alléger l'écriture, on notera usuellement $P(X = x)$ au lieu de $P([X = x])$ et cette remarque se généralise à tous les événements dépendants de X.

Exercice 24.2. On effectue 2 tirages avec remise dans un sac contenant 3 boules numérotées de 1 à 3.
Soit X la variable égale à la somme des nombres obtenus.
Alors $\Omega = [\![1, 3]\!]^2$, $Card(\Omega) = 9$ et $X(\Omega) = [\![2, 6]\!]$.
Compléter le tableau suivant de la loi de X :

i	2	3	4	5	6
$p_i = P(X = i)$					

Exercice 24.3. ➡ On lance trois fois de suite une pièce équilibrée.
On appelle X le nombre de fois où on obtient pile.
Donner la loi de X.

Remarque 24.194

1. Dans le cas fini, cela conduit à une présentation sous forme de tableau, du moins lorsque $X(\Omega)$ est assez petit.
2. Dans le cas infini, la représentation sous forme de tableau est évidemment beaucoup moins pratique ! Mais on peut continuer à *penser* la loi comme un tableau infini.

Exercice 24.4. On effectue une infinité de lancers.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers de dés nécessaires à l'obtention du premier 1.
On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement D_k : "obtenir un 1 au k^{ie} lancer".
Donner la loi de X .

Comme dans le cas fini, la somme des probabilités doit être égale à 1, mais dans le cas infini cela nécessite l'emploi de séries.

Théorème 24.57

Un ensemble $\{(x_k, p_k),\ k \in I\}$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète si et seulement si

1. $\forall k \in I,\ \ p_k \geqslant 0$
2. $\displaystyle\sum_{k \in I} p_k = 1$

Par exemple, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k]) = 1$

Exercice 24.5. Reprendre l'exercice 24.4 et montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) = 1$.

Exercice 24.6. ➡ Montrer que $\{(2k+1, \frac{2}{3^{k+1}}), k \in \mathbb{N}\}$ définit la loi de probabilité d'une variable discrète X.

24.2.2 Transformation d'une variable aléatoire discrète

Définition 24.7 (Transformation d'une v.a. discrète)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction d'une variable réelle. On note $f(X)$ l'application définie par

$$f(X): \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

Proposition 24.150

Soit X une variable **discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, f une fonction réelle et $Y = f(X)$.
Alors Y est une variable aléatoire **discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui vérifie

1. $Y(\Omega) = f(X(\Omega)) = \{f(k),\ k \in X(\Omega)\}$
2. $\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega),\ f(k) = y} P(X = k)$

Exercice 24.7. Soit X une variable de loi dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	0	1
p_i	1/8	1/2	3/8

Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 24.8. ➾ Soit X une variable aléatoire finie dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	2
p_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

1. Déterminer la loi de $Y = -3X + 1$.
2. Déterminer la loi de $Z = X^2$.

24.3 Moments d'une variable aléatoire

Dans cette partie, nous allons définir plusieurs quantités permettant de donner des informations sur les lois de probabilité. Attention, ces quantités ne caractérisent pas forcément la loi.

24.3.1 Espérance

La première quantité est l'espérance. C'est une généralisation de ce que vous connaissez sous le nom de moyenne.

Définition 24.8 (Espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que X admet une **espérance** lorsque $X(\Omega)$ est fini ou lorsque la série $\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k)$ est **absolument convergente**.
On appelle alors espérance de X le nombre

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k).$$

Remarque 24.195 (Interprétation)

1. L'espérance se comprend alors comme la moyenne des valeurs prises par la variable X pondérée par la probabilité de l'évènement associé.
2. Si $X(\Omega)$ est fini, l'espérance correspond à une somme finie.
3. Si $X(\Omega)$ est une partie de $\mathbb{N}$, sous réserve d'existence, l'espérance correspond à une série.

   Par exemple, dans le cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$.

Remarque 24.196

Puisque l'espérance ne dépend que de la loi de X, deux variables aléatoires ayant même la même loi ont la même espérance. En revanche, la réciproque est fausse en règle générale.

Exercice 24.9. Reprenons l'exemple 24.2 du sac contenant 3 boules numérotées de 1 à 3.
On effectue deux tirages avec remise et on note X la somme des résultats.
On a déterminé sa loi :

i	2	3	4	5	6
p_i	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

Calculer l'espérance de X.

Exercice 24.10. ➾ Considérons la variable aléatoire X de loi donnée par

x	-2	-1	0	2
$P_X(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$.

Calculer $E(X)$.

Exercice 24.11.

Une urne contient initialement deux boules, l'une noire et l'autre blanche. On tire une à une des boules dans cette urne en suivant le protocole suivant :

Si la boule tirée est noire, on la remet simplement dans l'urne avant le tirage suivant.
Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et l'on y rajoute une boule blanche avant le tirage suivant.

On note X le rang du premier tirage d'une boule noire.
On pourra utiliser les événements : Bi :« la i^{me} boule tirée est blanche »et Ni : « la i^{me} boule tirée est noire »

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
3. Calculer $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)$ et interpréter.
4. Calculer, si possible $E(X)$.

Exercice 24.12. ➾ On considère des lancers successifs et indépendants d'un dé et on note X le nombre de lancers de dés nécessaires pour obtenir un 1.
On pourra utiliser les évènements U_i :« le i^{me} lancer donne 1 ».

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
3. Calculer, si possible, $E(X)$.

Proposition 24.151 (Propriétés de l'espérance)

Si X et Y admettent une espérance, et si a, b sont des réels :

1. **Linéarité** : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
2. **Localisation** : si $X(\Omega) \subset [x, y]$ alors $x \leq E(X) \leq y$.
3. **Positivité** : si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ (i.e. X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) alors $E(X) \geq 0$.

Exemple 24.6. soit X une variable aléatoire discrète d'espérance m.
On a $E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2m + 3$.

Définition 24.9 (Variable centrée)

1. On dit que la variable X est **centrée** si $E(X) = 0$.
2. La variable $X - E(X)$ est appelée **v.a.r centrée** associée à X.

Exercice 24.13. Montrer que la v.a $X - E(X)$ est centrée.

Théorème 24.58 (Théorème de transfert.)

Soit X une variable discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction réelle.

$E(f(X))$ existe ssi $X(\Omega)$ est fini ou si la série $\sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k)$ **converge absolument**.

On alors
$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k).$$

Remarques 24.197

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, les notations se simplifient, et (sous réserve d'existence)
$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)P(X = k).$$

Cas particulier de la fonction carrée :
$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X = k).$$

Exercice 24.14. Soit X une v.a.r de loi :

x_i	-1	0	1
p_i	1/8	1/2	3/8

et $Y = X^2$.

1. Donner la loi de Y et calculer $E(Y)$.
2. Retrouver la valeur de $E(Y)$ grâce au théorème de transfert.

Exercice 24.15. ➭ Soit X une variable aléatoire dont le support est $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et telle que $P(X = -1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$. On pose $Y = |X|$.

1. Donner la loi de Y et $E(Y)$.
2. Retrouver la valeur de $E(Y)$ grâce au théorème de transfert.

24.3.2 Variance

Définition 24.10 (Variance)

Soit X une var discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous-réserve d'existence, on appelle

- **Moment d'ordre** 2 de X le nombre
$$m_2(X) = E(X^2)$$
- **Variance** de X le nombre
$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$
(mesure l'écart entre X et sa moyenne)
- **Ecart-type** de X le nombre
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque 24.198 (Interprétation)

La variance d'une variable aléatoire et son écart-type mesurent la **dispersion de** X **autour de sa valeur moyenne (son espérance)**.

En pratique, la formule de la définition de la variance n'est pas très manipulable. En effet, il faut d'abord trouver la loi de $(X - E(X))^2$ pour en calculer son espérance.

Voici un théorème donnant une technique de calcul de la variance qui peut s'avérer plus simple que la définition.

Théorème 24.59 (de Koenig-Huygens)

X admet une **variance** si et seulement si elle admet un **moment d'ordre** 2, et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Démonstration. Faire la preuve.

□

Remarque 24.199

Une variable aléatoire peut donc admettre une espérance sans admettre de variance, mais pas le contraire.

Méthode 24.66 (Pour répondre à la question "X admet-elle une variance ? Si oui la calculer")

Lorsque X admet une espérance (sinon la réponse à la question est non), regarder si $E(X^2)$ existe (autrement dit si X admet un moment d'ordre 2), et le cas échéant utiliser la formule précédente $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ pour la calculer.

Exercice 24.16. Considérons la variable aléatoire X de loi

x	-2	-1	0	2
$P_X(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$.

Calculer la variance de X.

Exercice 24.17. Soit X le rang d'obtention du premier 1 avec un dé équilibré.
Montrer que $V(X)$ existe et la calculer.

Attention, la variance n'est pas linéaire. En particulier, on a généralement $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$, où X et Y représentent deux variables aléatoires discrètes admettant une variance.

La propriété suivante nous montre comment la variance agit sur les combinaisons linéaires.

Proposition 24.152 (Propriétés de la variance)

1. Pour des réels a, b et X admettant une variance. Alors $aX + b$ admet une variance et
$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$
2. $V(X) \geq 0$
3. $V(X) = 0$ si et seulement si X est constante (certaine).

Exercice 24.18. Soit X une variable aléatoire discrète de variance σ^2.
Calculer $V(2X+3)$.

Exercice 24.19. ➻ Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance m et de variance σ^2.
Calculer $E(2X)$, $E((X-3)^2)$, $E((X-m)^2)$, $V(5X)$ et $V(3X+1)$.

24.3.3 Variables centrées et centrées réduites

Il est souvent beaucoup plus pratique de travailler avec des variables centrées et réduites ; cela simplifie souvent les calculs. Lorsqu'une variable n'est pas centrée réduite, on peut introduire une seconde variable, construite à partir de la première, qui l'est.

Définition 24.11 (et propriété)

1. X est **centrée réduite** si $E(X) = 0$ et $V(X) = \sigma(X) = 1$.
2. $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$, avec $\sigma(X) \neq 0$, est la **variable centrée réduite associée à** X.

Exercice 24.20. Montrer que la variable X^* vérifie $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$.

24.4 Hors-programme (2ème année) : fonction de répartition d'une variable aléatoire

24.4.1 Cas général

Exemple 24.7. Un sac contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire deux boules avec remise : on note X_1, le numéro de la première boule ; X_2 celui de la deuxième boule.
Soit Y le plus grand des 2 : $Y = \max(X_1, X_2)$.
Loi de Y ? $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$, $Card(\Omega) = 25$ et $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
$(Y = 4) = [(X_1 = 4) \cap (X_2 = 1)] \cup [(X_1 = 4) \cap (X_2 = 2)] \cup \ldots \cup [(X_1 = 1) \cap (X_2 = 4)] \cup \ldots$: beaucoup d'issues sont possibles donc probabilité difficile à calculer (surtout si on généralise à n !).
Pouvez-vous calculer $P(Y \leq 4)$?

A retenir : il peut être plus judicieux dans certains cas de calculer des probabilités du type $P(X \leq x)$ plutôt que du type $P(X = x)$.

Définition 24.12 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On appelle **fonction de répartition** de X la fonction réelle F_X définie par

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(X \leqslant x) \end{array}$$

Cette fonction est très importante en probabilité. Nous verrons par la suite qu'elle simplifie considérablement les choses dans de nombreux exercices. Voyons les propriétés notables qu'elle possède.

Théorème 24.60 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. F_X est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Exercice 24.21. Reprendre l'exemple 24.7, calculer F_Y et dessiner F_Y.

Exercice 24.22. ➻ On lance une pièce de monnaie bien équilibrée trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de `Face` obtenues. On pose

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si deux côtés identiques apparaissent successivement} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Dessiner F_X et F_Y.

Quelles autres propriétés notables semblent avoir ces fonctions ?

24.4.2 Cas discret

Les propriétés suivantes de la fonction de répartition sont valables **uniquement** dans le cas **discret**.

Proposition 24.153 (Propriétés supplémentaires de F_X dans le cas discret)

Soit X une var **discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et F_X sa fonction de répartition.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_X(x) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega),\ k \leq x} P([X = k])$.
2. $\forall k \in X(\Omega),\ \ P([X = k]) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

Remarque 24.200

Illustration dans le cas $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Soit $k \in X(\Omega)$. On a :

$$P([X = k]) = P(k - 1 < X \leq k) = F_X(k) - F_X(k-1)$$

On a vu dans l'exemple précédent que la connaissance de la loi d'une variable aléatoire détermine sa fonction de répartition. Réciproquement la fonction de répartition permet de reconstituer la loi de la variable.

Exercice 24.23. Un sac contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire deux boules avec remise.
On note X_1, le numéro de la première boule ; X_2 celui de la deuxième boule.
Soit Y le plus grand des 2 : $Y = \max(X_1, X_2)$.
Déterminer la loi de Y à partir de F_Y (calculé à l'exercice 24.21).

On vérifie alors que la somme de ces probabilités fait bien 1 ! !

Exercice 24.24. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{2}{3^k}$. Donner l'expression de F_X.

L'intérêt principal de la fonction de répartition, c'est qu'elle définit entièrement la loi de X.

Proposition 24.154 (« la fonction de répartition caractérise la loi »)

$$F_X = F_Y \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}$$