Chapitre 23

Espaces probabilisés

Sommaire

A la fin de ce chapitre, il vous faudra :

- Savoir écrire et interpréter une union et une intersection infinie d'évènements.
- Connaître la notion de suites croissantes et décroissantes d'évènements.
- Connaître la notion d'évènement presque sûr et quasi impossible.
- Utiliser le théorème de la limite monotone.
- Connaître la généralisation de la formule des probabilités totales à un sce infini.

Prérequis
Revoir le chapitre sur :
- les sommes et produits ;
- la théorie des ensembles et applications.

Ce chapitre complète et généralise les résultats établis au chapitre sur les probabilités sur un univers finis au cas d'un univers Ω infini. Les principales notions sont reprises dans ce nouveau cadre. Certaines changent peu, voire pas du tout, mais dans certains cas, les énoncés doivent être adaptés et des précautions prises. Par exemple, les sommes qui intervenaient dans le chapitre sur les probabilités sur un univers fini (somme des probabilités) sont alors remplacées par des séries dont la convergence n'est *a priori* pas assurée.

I désignera $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.

23.1 Événements

23.1.1 Introduction et exemples fondamentaux

Cas typique étudié jusqu'à présent :

1. On effectue un nombre fini de lancers d'une pièce on regarde le nombre de piles obtenus ou de boules blanches obtenues
2. On effectue un nombre fini de tirages d'une boule dans une urne et on regarde le nombre de boules blanches obtenues.
3. On lance 5 fois une pièce et on regarde le nombre de pile obtenus. On a alors $\Omega = \{P;F\}^5$

Dans ce chapitre, nous allons maintenant étudier des situations du type :

Exemple 23.1 (Exemples fondamentaux sur un univers infinis)**.**

1. On jette une pièce et on note le premier rang pour lequel on tombe sur Pile. Si l'on obtient pile au n-ième lancer, le résultat obtenu pourra être représenté par la suite $(F, \dots, , F, P)$ (n termes). Mais il se peut que l'on obtienne jamais pile, résultat qu'on peut représenter par une infinité de F.
   Alors $\Omega = \{P;F\}^{\mathbb{N}}$.
2. On jette indéfiniment un dé à six faces et on note la suite des résultats obtenus.
   Alors $\Omega = ([\![1;6]\!])^{\mathbb{N}}$ qui est l'ensemble des suites d'éléments de $[\![1;6]\!]$, donc infini et dénombrable.
3. On note le temps d'attente d'un bus, qui est un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;10]$. Cette univers est infini et non dénombrable (c'est à dire « beaucoup plus grand » que $\mathbb{N}$).

A noter que ces nombres aléatoires peuvent être très grands voire éventuellement infinis, comme dans le dernier exemple.

Exercice 23.1 (Intersections/réunions infinies d'événements)**.**

On considère la seconde expérience modélisée dans l'exemple précédent et on note, pour tout entier naturel non nul i, A_i : « le résultat du i-ème lancer est 1 ».

Exprimer les événements suivants à l'aide des événements A_i :

1. B_i : « Le premier 1 apparaît au i-ième lancer »
2. C : « Au moins un des résultats est un 1 »
3. D : « Aucun lancer ne donne un 1 »
4. E : « Obtenir 1 à tous les lancers »

Exercice 23.2 (✒)**.**

On considère la première expérience modélisée dans l'exemple précédent et on note, pour tout entier naturel non nul i, F_i : « le résultat du i-ème lancer est un face ».

Exprimer les événements suivants à l'aide des événements F_i :

1. B_i : « Le premier face apparaît au i-ième lancer »
2. C : « Au moins un des résultats est un face »
3. D : « Tous les lancers donnent pile »
4. E : « Aucun des lancers donne face »

23.1.2 Ensemble des évènements

Pour effectuer des calculs de probabilités dans ce cadre là, il faut introduire une nouvelle structure ou espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, avec Ω éventuellement infini.

Définition 23.1

L'ensemble des évènements est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$, noté $\mathcal{A}$, qui vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $\mathcal{A}$ est **stable par passage au complémentaire** : si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
3. $\mathcal{A}$ est **stable par union au plus dénombrable** : si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_n)_{n\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup\limits_{n\in I} A_n \in \mathcal{A}$.

On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espaceprobabilisable** et les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés **événements**.
A noter que comme $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire et par union dénombrale, on a aussi que $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : pour tout $I \subset \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I$, $A_n \in \mathcal{A}$, on a $\bigcap\limits_{n\in I} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarque 23.179

$I \subset \mathbb{N}$ signifie que I est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Ca peut être $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ ou tout autre ensemble d'entiers.

- Si $I = \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n\in I} A_n \in \mathcal{A} = \bigcup\limits_{n\in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- Si $I = \mathbb{N}^*$, $\bigcup\limits_{n\in I} A_n \in \mathcal{A} = \bigcup\limits_{n\in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarque 23.180

Toutes les opérations sur les événements que l'on faisait dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, lorsque Ω était fini, restent bien sûr vraies dans le cas plus général de Ω infini muni d'une tribu $\mathcal{A}$.
Mais en plus les opérations $\bigcap\limits_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty}$ sont permises (où n_0 est un rang quelconque qui peut valoir 0, 1, 12,...).

23.2 Intersection et union d'événements

On retiendra que tout ce que nous avions vu dans le chapitre des probabilités sur un univers fini reste vrai mais qu'il faut donc maintenant également prendre en compte la possibilité de manipuler **des familles infinies d'événements**. Essayons de comprendre ce qu'une telle union (ou intersection) dénombrable signifie.

Définition 23.2 (Union et intersection infinies dénombrables)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n un événement.

1. La réunion $\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n \geq n_0} A_n$ est l'événement **"au moins un des événements A_n se réalise pour un entier $n \geq n_0$"**.
2. L'intersection $\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n \geq n_0} A_n$ est l'événement **"tous des événements A_n se réalisent pour à partir du rang n_0"**.

Proposition 23.143 (Lois de Morgan)

Les lois de Morgan pour de tels événements restent vraies.

$$\overline{\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=n_0}^{+\infty} \overline{A_n} \text{ et } \overline{\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=n_0}^{+\infty} \overline{A_n}.$$

Exercice 23.3. On lance une pièce une infinité de fois. On note A_n l'événement "obtenir pile au n-ième lancer".

1. Décrire l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et l'évènement contraire associé.
2. Décrire l'événement $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ et l'évènement contraire associé.
3. Comment écrire " ne jamais obtenir de pile " ?

Pour terminer, il est également possible d'étendre la définition de système complet d'événements au cas Ω de cardinal infini.

Définition 23.3 (Système complet d'évènements (s.c.e))

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et soit I une partie de $\mathbb{N}$ (en particulier I peut être $\mathbb{N}$).
Une famille dénombrable $(A_n)_{n \in I}$ est un **système complet d'événements** ssi

1. $\forall n \in I, A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \neq \varnothing$
2. les événements sont 2 à 2 incompatibles c'est-à-dire
$$\forall (i,j) \in I^2 \text{ tel que } i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing.$$
3. $\Omega = \bigcup_{n \in I} A_n$.

Exemple 23.2. Si $A \in \mathcal{A}$, $\{A, \overline{A}\}$ est un s.c.e.
Si I est un ensemble dénombrable et si $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ alors $(\{\omega_i\})_{i \in I}$ est un s.c.e.

23.3 Espace probabilisé

Puisque notre objectif est toujours de calculer la probabilité de certains événements, nous allons étendre la définition de probabilité au cadre étudié actuellement.

23.3.1 Definition

Définition 23.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable (fini ou infini).
On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0;1]$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in I}$ d'événements 2 à 2 **incompatibles**, la série $\sum\limits_{n\in I} P(A_n)$ converge et
$$P(\bigcup_{n\in I} A_n) = \sum_{n\in I} P(A_n).$$
On dit que P est σ**-additive.**

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé** et $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ est la probabilité de A.

Remarque 23.181

Si Ω est fini, on retombe bien sur la définition vue au chapitre sur les probas finies.

23.3.2 Propriétés classiques

Proposition 23.144

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $I \subset \mathbb{N}$.
Si $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements, alors $\sum\limits_{n\in I} P(A_n) = 1$.

Remarque 23.182

Toutes les propriétés d'une probabilité vues dans le chapitre 17 restent vraies dans le cas d'un univers infini. Autrement dit :

1. $P(\varnothing) = 0$,
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, etc.

Proposition 23.145

Si $(A_n)_{n\in I}$ est une famille **dénombrable** d'événements de $\mathcal{A}$ et si la série de terme général $P(A_n)$ converge, alors :

$$P(\bigcup_{i\in I} A_n) \leq \sum_{n\in I} P(A_n).$$

23.3.3 Évènement presque certain et négligeable

Définition 23.5 (Evènement presque certain et évènement négligeable)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. A est dit **négligeable ou quasi-impossible** si $P(A) = 0$ et $A \neq \varnothing$
2. A est dit **presque sûr ou quasi-certain** si $P(A) = 1$ et $A \neq \Omega$..

Remarque 23.183

Dans le cas fini, les notions d'événements impossibles et d'événements négligeables se confondent. De même pour les notions d'événements certains et presque sûrs. Mais dans ce nouveau cadre, ce n'est plus le cas. Il faut être particulièrement attentif à cette différence lorsqu'on considère des s.c.e et la formule des probabilités totales.

23.3.4 Suites croissantes et décroissantes d'évènements

Définition 23.6

1. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante** d'événements de $\mathcal{A}$ si
   $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$,
   autrement dit si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n réalisé implique que A_{n+1} est réalisé.
2. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **décroissante** d'événements de $\mathcal{A}$ si
   $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$,
   autrement dit si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} réalisé implique que A_n est réalisé..

23.3.5 Théorème fondamental : théorème de la limite monotone

On termine cette partie avec une propriété nouvelle qui a une importance considérable dans le domaine des probabilités.

Théorème 23.52 (Théorème de la limite Monotone)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **quelconque** d'événements, alors on a :

1.
$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \quad \text{si } (A_n) \text{ est une suite } \textbf{croissante} \text{ d'évn.} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \quad \text{si } (A_n) \text{ est une suite } \textbf{décroissante} \text{ d'évn.} \end{aligned}$$

Remarque 23.184

On peut bien sûr remplacer dans ces théorèmes le rang 0 par n'importe quel rang n_0.

Exercice 23.4 (Exercice fondamental). On reprend le cadre de l'exemple 23.2 avec un dé équilibré et une infinité de lancers mutuellement indépendants. On note :

- A_k : « le résultat du k-ème lancer est 1 ».
- C : « au moins un des résultats est un 1 ».
- C_n : « au moins un des résultats est un 1 lors des n premiers lancers ».

1. (a) Exprimer C_n à l'aide des A_k.
   (b) Déduire que $P(C_n) = 1 - P\left(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right)$
   (c) Calculer alors $P(C_n)$.
2. (a) Justifier que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements.
   (b) Exprimer C à l'aide des C_k, puis montrer que C est presque sûr.
3. (a) Exprimer C à l'aide des A_k. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle une suite monotone d'événements ?
   (b) Retrouver que C est presque sûr.

Exercice 23.5 (⊶, Exercice fondamental). On reprend le cadre de l'exemple 23.2 avec un dé équilibré et un nombre infini de lancers mutuellement indépendants. On note :

- A_k : « le résultat du k-ème lancer est 1 ».
- D : « obtenir aucun 1 ».
- D_n : « ne pas obtenir de 1 lors des n premiers lancers ». premiers lancers ».

1. Exprimer D en fonction des évènements A_k, puis en fonction des évènements D_n.
2. Démontrer que D est négligeable de deux manières (en appliquant le théorème de convergence monotone avec les évènements D_n et avec les évènements A_k directement).

Exercice 23.6. Y réfléchir Un singe tape une suite infinie de caractères au hasard sur un clavier d'ordinateur qui comporte 50 touches. Montrer qu'il écrira presque-sûrement la phrase : "Les ECE du lycée Ozenne sont les meilleurs !

23.4 Probabilités conditionnelles et indépendance

Presque tout ce qui a été vu dans le cas fini fonctionne à l'identique dans le cas infini : définition de la probabilité conditionnelle, indépendance d'événements, formule de Bayes, formule des probabilités composées.

Il faut simplement généraliser l'indépendance mutuelle d'événements et la formule des probabilités totales à des familles infinies dénombrables (on a vu précédemment la définition de s.C.E dans un tel cadre).

23.4.1 Probabilités conditionnelles

Théorème 23.53

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non-nulle.
Alors l'application P_A définie sur $\mathcal{A}$ par

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

pour tout $B \in \mathcal{A}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle** relative à A ou probabilité sachant A.
$P_A(B)$ est encore parfois noté $P(B/A)$.

Remarque 23.185 (fondamentale)

Très souvent, il est plus facile de calculer $P_A(B)$ que $P(A \cap B)$ donc dans ces cas, on utilise la définition de la probabilité conditionnelle pour obtenir $P(A \cap B)$: $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

Remarques 23.186

Attention : comme dans le cas fini, il ne pas confondre $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$.
Pour $P(A \cap B)$, on cherche à savoir quand A et B se réalisent **sans** connaissance a priori, alors que pour $P_A(B)$, on **sait** que A est réalisé, et on cherche seulement à savoir quand B se réalise.
La probabilité conditionnelle étant une probabilité, toutes les propriétés vraies pour une probabilité, restent vraies pour la probabilité conditionnelle.

Proposition 23.146

1. $P_A(\Omega) = 1$
2. $P_A(\emptyset) = 0$.
3. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.
4. Si $C \subset B$ alors $P_A(C) \leq P_A(B)$.
5. $P_A(C \cup B) = P_A(C) + P_A(B) - P_A(C \cap B)$.

23.4.2 Formule des probabilités composées

Proposition 23.147 (Formule des probabilités composées)

Soient $A_1, .., A_n$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1}}(A_n).$$

23.4.3 Formule des probabilités totales

Théorème 23.54 (Formule des probabilités totales)

Soit I une partie, finie ou non, de $\mathbb{N}$.
Soit $(A_n)_{n \in I}$ un **système complet d'événements** d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tels que $\forall n \in I,\ P(A_n) \neq 0$.
Alors pour tout évènement B, on a :

$$P(B) = \sum_{n \in I} P(B \cap A_n) = \sum_{n \in I} P(A_n) P_{A_n}(B). \tag{23.1}$$

Remarque 23.187

1. La première écriture est toujours vraie. L'hypothèse que les A_n sont de probabilités non nulles sert pour écrire la seconde égalité.
2. Si $I = \mathbb{N}$, la formule revient à écrire

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) P(A_n).$$

Exercice 23.7. On se place dans le cadre de l'exemple 23.2, c'est à dire que l'on considère une infinité de lancers mutuellement indépendants d'un dé.
On note :

- A_k : « le résultat du k-ème lancer est 1 ».
- B_n : « le premier 1 apparaît au n-ième lancer ».

1. Exprimer B_n en fonction des A_k. Déduire $P(B_n)$. Vérifier que l'on a bien $\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = 1$.
2. Calculer la probabilité de l'événement E : « La première fois qu'un 1 est sorti, il est suivi d'un autre 1 ».

Remarque 23.188

Comme nous l'avions remarqué dans le chapitre sur les probabilités sur un univers fini, la formule des probabilités totales est utile lorsque deux étapes d'une expérience aléatoire s'enchaînent et que la seconde donne des résultats différents suivant les résultats de la première.

Exercice 23.8. ➾ On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile pour la première fois. Si pile sort au n-ème lancer, on lance n fois un dé cubique non truqué. Si pile ne sort pas, on ne lance pas le dé. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de 6 ?

23.4.4 Formule de Bayes

Théorème 23.55 (Formule de Bayes)

1. Soit A et B deux événements de **probabilité non nulle** ; alors

$$P_B(A) = P_A(B)\frac{P(A)}{P(B)}.$$

2. Soit I une partie, finie ou non, de $\mathbb{N}$.
Soit $(A_n)_{n\in I}$ un **système complet d'événements** d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tels que $\underline{\forall n \in I,\ P(A_n) \neq 0}$ et B un événement de probabilité non nulle, alors $\forall k \in I$ on a

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{n\in I} P(A_n)P_{A_n}(B)}.$$

23.4.5 Indépendances en probabilité

Les définitions de l'indépendance deux à deux et de l'indépendance mutuelle données au chapitre sur les probabilités sur un univers fini, ainsi que les propriétés qui s'y rattachent, restent valables dans le cas où l'univers n'est pas fini.
Voici une généralisation de la définition de l'indépendance mutuelle à une suite d'événements :

Définition 23.7 (Indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Proposition 23.148

Si A et B sont indépendants pour la probabilité P alors A et $\overline{B}$ (resp. $\overline{A}$ et B, resp. $\overline{A}$ et $\overline{B}$) le sont aussi.

Définition 23.8

Soit I une partie, finie ou non, de $\mathbb{N}$.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux indépendants** pour la probabilité P si et seulement si $\forall (i,j) \in I^2$ $i \neq j$, $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$
2. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ sont **mutuellement indépendants** si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour toute liste $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ d'éléments distincts de I, on a :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times ... \times P(A_{i_k}).$$

Remarque 23.189

1. La définition parle bien de "toute partie de $\mathbb{N}$ **finie**" pour le point 2 puisque l'on prend une liste finie.
2. Il est plutôt rare en pratique d'avoir à démontrer une telle indépendance mutuelle. Elle provient la plupart du temps d'un choix de modélisation.

Exemple 23.3. Si on lance une infinité de fois une pièce donnant pile avec probabilité p et qu'on appelle A_n l'événement "obtenir pile au n-ème lancer", on peut considérer que les A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont indépendants. Ainsi, la probabilité que pile apparaisse pour la première fois au n-ème lancer est

$$P(A_n \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_{n-2}} \cap \cdots \cap \overline{A}_1) = p(1-p)^{n-1}.$$