Chapitre 2

Généralités sur les fonctions et fonctions usuelles

Sommaire

Cette section est consacrée à l'étude générale de fonctions, avec en particulier un rappel sur les fonctions usuelles.

Ce chapitre a pour but de fournir un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles, ces résultats seront mémorisés grâce aux représentations graphiques qui en constituent une synthèse.

On se restreindra aux fonctions définies sur un intervalle $\mathbb{R}$. L' analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices. Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

2.1 Généralités sur les fonctions

2.1.1 Définition

Définition 2.1

On dit que f est une **fonction** numérique d'une variable réelle s'il existe un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que chaque nombre $x \in I$ possède une *unique* image $f(x)$ qui est un nombre réel.
Notation : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$.

Dès que l'on considère f sur I, on peut dire également que f est une **application** de I dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.2

1. L'ensemble I, des nombres réels qui possèdent une image par f, est appelé **ensemble de définition** de f. Il est noté traditionnellement $\mathcal{D}_f$.
2. a est un **antécédent** de b par f si b est l'**image** de a par f, i.e. $b = f(a)$. Les nombres réels qui possèdent au moins un antécédent par f constituent l'ensemble image de f, que l'on note $f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'ensemble des points (du plan cartésien) de coordonnées $(x, f(x))$, où x est un élément de $\mathcal{D}_f$, est la courbe représentative de f.

Remarque 2.8

L'ensemble de définition d'une fonction n'est pas nécessairement un intervalle.
Par exemple, si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ alors

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / \, x^2 - 1 \geqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \; x^2 \geqslant 1\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

Exemple 2.1. Lecture graphique d'image et d'antécédents

Lecture d'image

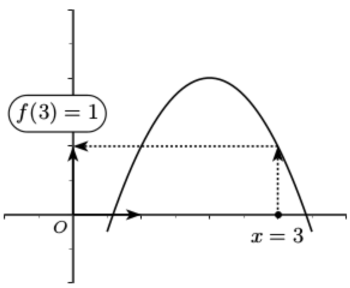
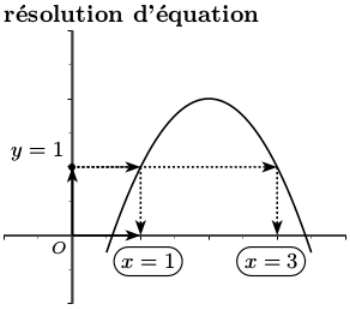


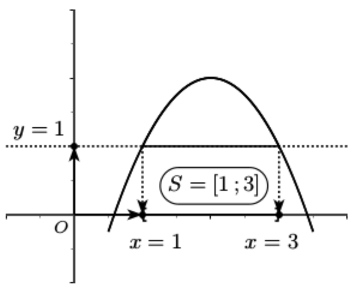
image de 3 par f ou $f(3)$: 1.

Lecture d'antécédent ou résolution d'équation



antécédents de 1 par f ou solutions de $f(x) = 1$: 1 et 3.

Résolution d'inéquation



ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 1$: $[1, 3]$

2.1.2 Opérations sur les fonctions

Proposition 2.12 (Opérations sur les fonctions)

Soient f, g deux fonctions numériques définies sur le même ensemble I et λ un nombre réel :

1. La **somme** de f et de g est la fonction notée $f+g$ et définie sur I par :
$$\forall x \in I \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
2. Le **produit** de f et de g est la fonction notée $f.g$ et définie sur I par :
$$\forall x \in I, \quad (f.g)(x) = f(x)\times g(x)$$
3. Le **produit du réel** λ par la fonction f est la fonction notée λf définie sur I par :
$$\forall x \in I \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$
4. Si de plus $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors le **quotient** de f par g est la fonction notée $\dfrac{f}{g}$ définie sur I par
$$\forall x \in I \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

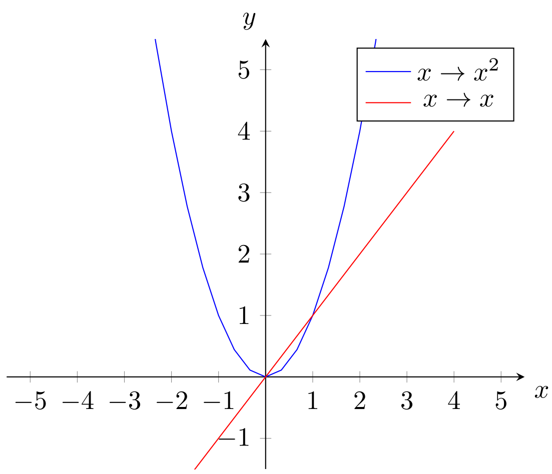
2.2 Fonctions usuelles

Il vous faudra parfaitement connaître le domaine de définition, la représentation graphique et les propriétés de ces fonctions.

2.2.1 Fonction carrée et fonction cube

Définition 2.3

La fonction **carrée** $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.



Propriétes 2.0

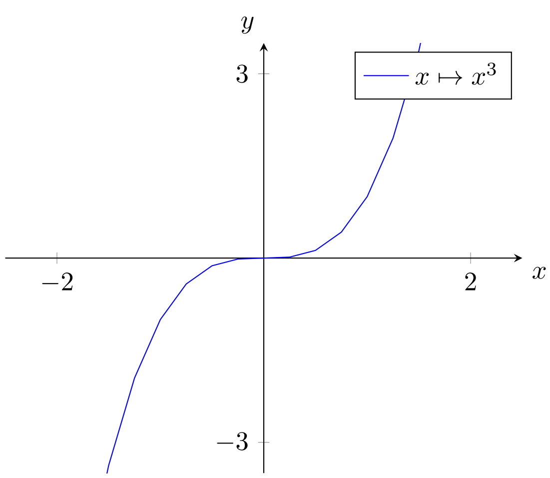
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$.
2. $\forall x \in [0;1]\,,\ x^2 \leq x$.
3. $\forall x \geq 1,\quad x \leq x^2$.

Propriétes 2.0

1. La fonction carrée est **paire** sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction carrée est **décroissante** sur $\mathbb{R}_-$ et **croissante** sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 2.4

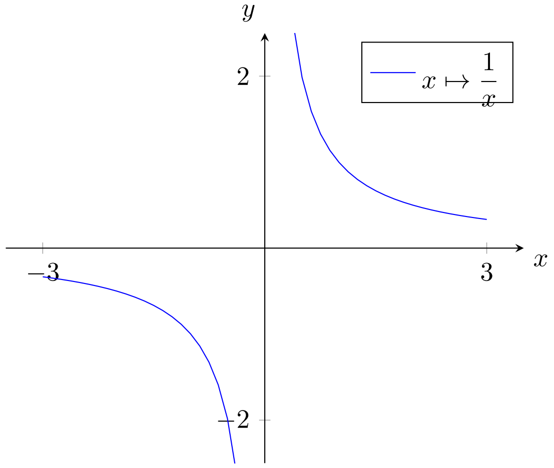
La fonction **cube** $x \mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$.



2.2.2 Fonction inverse

Définition 2.5

La fonction **inverse** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Proposition 2.13

1. La fonction inverse est **impaire** sur $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction inverse est **décroissante** sur $\mathbb{R}_-$ et **décroissante** sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2.1. Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{-x^2+3x-2}$.

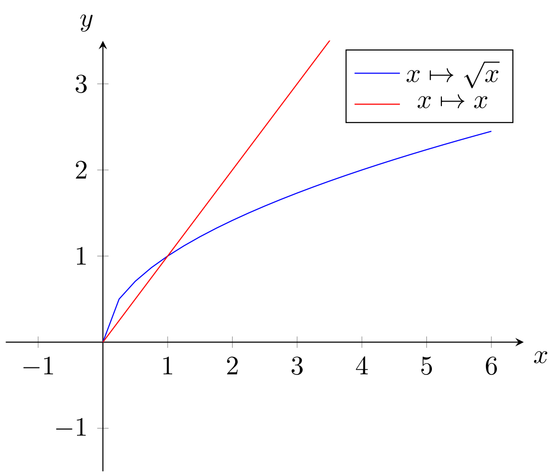
Exercice 2.2.

Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-6x)(x^2-2x+1)}$.

2.2.3 Racine carrée

Définition 2.6

La fonction **racine carré** $x \to \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.



Exercice 2.3. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 2.4.

Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Propriétes 2.0

1. $\forall x \in [0;1]\,,\ \sqrt{x} \geq x$
2. $\forall x \geq 1,\ \sqrt{x} \leq x$

Proposition 2.14

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \geq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ (\sqrt{x})^2 = x$.
3. **Attention**, $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x^2} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ \sqrt{x^2} = -x$.

Lorsque x est strictement négatif, $\left(\sqrt{x}\right)^2$ n'a aucun sens mais $\sqrt{x^2}$ en a un.

Proposition 2.15

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

1. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
2. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ $(y \neq 0)$

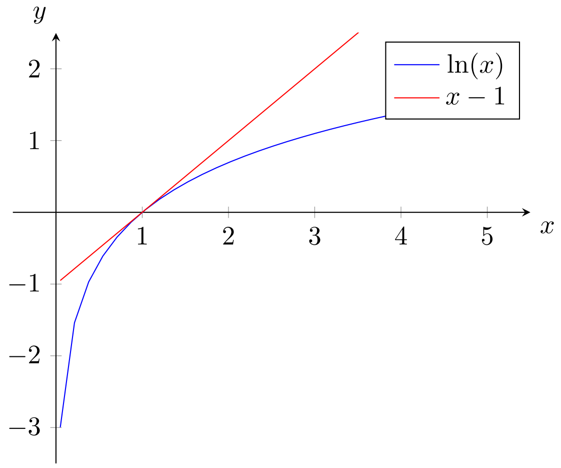
Remarque 2.9

Il n'y a **aucune** propriété pour les additions ou les soustractions.
Ainsi $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

2.2.4 Logarithme népérien

Définition 2.7

La fonction logarithme, notée ln, est définie sur $]0, +\infty[$.



- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(0)$ n'existe pas !!! **Attention, 0 est exlu !**

Propriétes 2.0

1. La fonction logarithme est **croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1]$ et $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Exercice 2.5. Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$.

Exercice 2.6.

Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{3x+1}\right)$.

Propriétes 2.0 (A connaître parfaitement)

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$:
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Conséquences :
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

$\frac{\ln(a)}{\ln b} \neq \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ et $\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b)$.

Exercice 2.7. Déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Pour celles qui sont fausses, les corriger de façon à les rendre juste.

a) $\ln x$ existe ssi $x \geqslant 0$ *b)* $\ln(\dfrac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ *c)* $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$

Exemple 2.2. $\ln\left(\frac{192}{108}\right) = \ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$.

Exercice 2.8.

1. Simplifier $3\ln(3) - \ln(\frac{1}{9})$.
2. Simplifier $F = \dfrac{\ln(16) + \ln(8)}{10\ln(2) + \ln(4)}$ sous la forme $F = q$ avec $q \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2.9. ✎

Comme sur l'exemple ci-dessus, transformer les expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{96}), \quad B = \ln(x+3) + \ln(2x+1)$$

et dire pour quelles valeurs de x la seconde expression est bien définie.

Proposition 2.16

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$.
La stricte croissance de la fonction logarithme donne

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$.
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$.

Antécédents remarquables :

- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$ avec $e \simeq 2.718$..

Exercice 2.10.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x+2) = 1$
2. $\ln(2x+1) > \ln(x^2+2)$
3. $3\ln(x) + \ln(x^2) < 5\ln(2)$.

Exercice 2.11. ✎

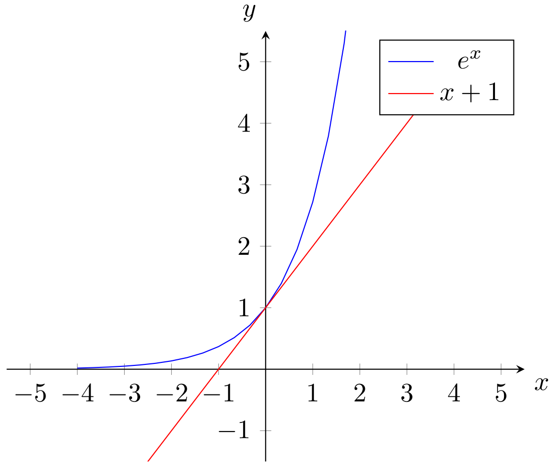
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x^2+2) = \ln(x+3)$
2. $\ln(\ln(x)) < 0$

2.2.5 Exponentielle

Définition 2.8

La fonction **exponentielle**, notée exp, est définie sur $\mathbb{R}$.



Remarque 2.10

$\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718$.

Proposition 2.17

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.
2. La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

Proposition 2.18

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien vu précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

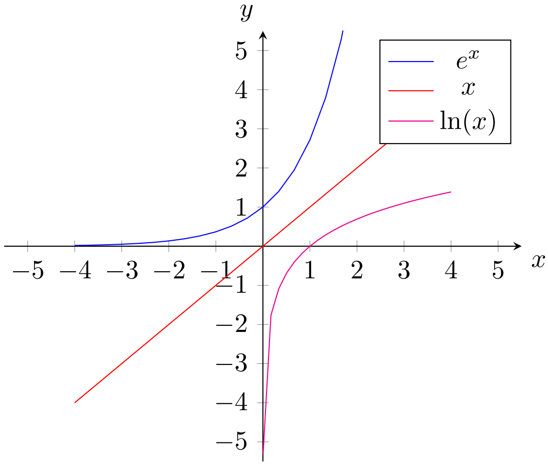
Autrement dit :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln x} = x.$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln e^x = x.$

Remarque 2.11

Graphiquement, cette propriété de "fonction réciproque" se traduit par une symétrie : le graphe de la fonction exponentielle est le symétrique par rapport à la première bissectrice (la droite $y = x$) du graphe de la fonction logarithme.



Propriétes 2.0

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:
   - $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
   - $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

   Conséquences :
   - $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.
   - $\forall n \in \mathbb{Z},\ (e^a)^n = e^{an}$.

La somme d'exponentielles n'est pas égale à l'exponentielle de la somme : $e^a + e^b \neq e^{a+b}$. Donner un contre-exemple.

Ce qu'il faut retenir c'est que le logarithme transforme le produit en somme. Et inversement, l'exponentielle transforme la somme en produit.

Remarque 2.12

En résumé, l'exponentielle a la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances (à l'inverse du logarithme qui transforme les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications).

Exercice 2.12. Déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Pour celles qui sont fausses, les corriger de façon à les rendre juste.

$a)\quad e^{a\times b} = e^a \times e^b \qquad$ b) $\quad e^a + e^b = e^{a+b} \qquad c)\quad be^a = e^{a^b} \qquad d)\quad \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad e) e^{-3\ln(2)} = 6$

Exercice 2.13.
Simplifier $\ln\left(\frac{e^5\times 12}{e^{-6}\times e^2}\right)$ sous la forme $G = m + n\ln(2) + p\ln(3)$ avec $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.14.
Simplifier $\dfrac{2e^4 \times e^{-2} + e^2}{e^4 \times e^6}$.

Propriétes 2.0

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

   - $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
   - $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
     Ceci est du à la stricte croissance de la fonction exponentielle.

2. Antécédent remarquable : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Exercice 2.15.

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

1. $e^{2x+1} = 4$
2. $\ln(x^2 - 1) - \ln(x) < 0$
3. $\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = 2$

Exercice 2.16.

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

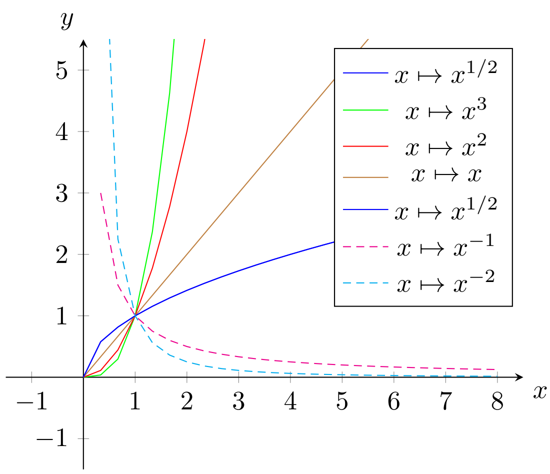
1. $e^x e^{8x+1} = 1$
2. $e^{2x+1} - 3 > 0$
3. $\ln(2x) + \ln(x+1) > 2$

2.2.6 Fonctions puissances

Définition 2.9 (Fonction puissance d'un nombre réel strictement positif.)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction **puissance d'exposant** α, notée f_α, est la fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+^*$, associe

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$



Exemple 2.3. Si $x > 0$, $(x^3)^{1/3} = x^{3*1/3} = x^1 = x$ et de même, $(x^{1/3})^3 = x^{1/3*3} = x$.

Remarque 2.13

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et parfois par abus de langage, on confond ces écritures sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 2.14

Attention ! L'écriture x^α n'est qu'une **notation**. Pour étudier une telle fonction, il faudra toujours repasser par son écriture exponentielle.

Proposition 2.19 (Règles de calcul.)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta} = x^{\beta \times \alpha} =, (x^\beta)^\alpha$$

$$x^0 = 1, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}.$$

➤ Les règles de calcul restent les mêmes que dans le cas de puissances entières, excepté qu'elles ne sont valables que pour des réels **strictement positifs**.

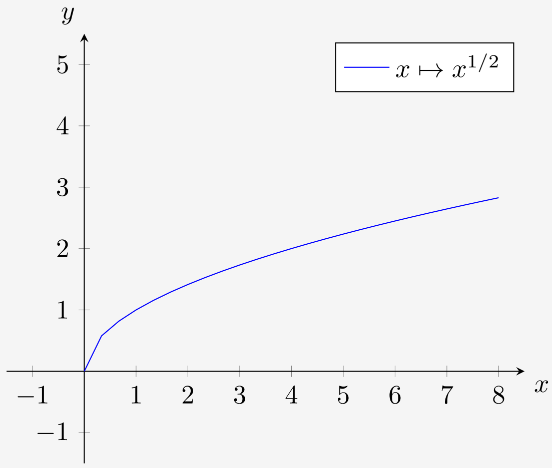
Exercice 2.17. Résoudre l'équation $x^{2/3} = 2$.

Exercice 2.18. ➼ Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0{,}99^n < 0{,}5$.

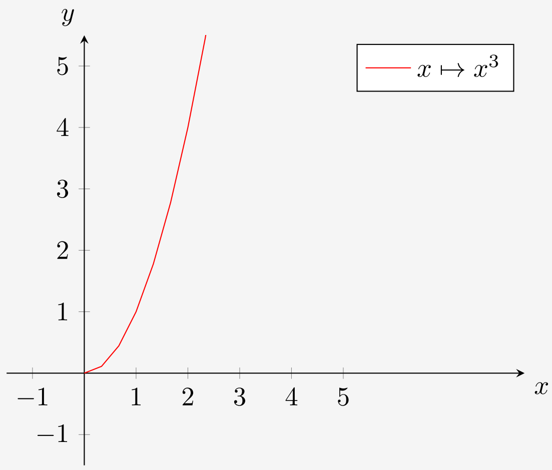
Propriétes 2.0

La représentation graphique des différentes fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ est donnée par les graphiques suivants :

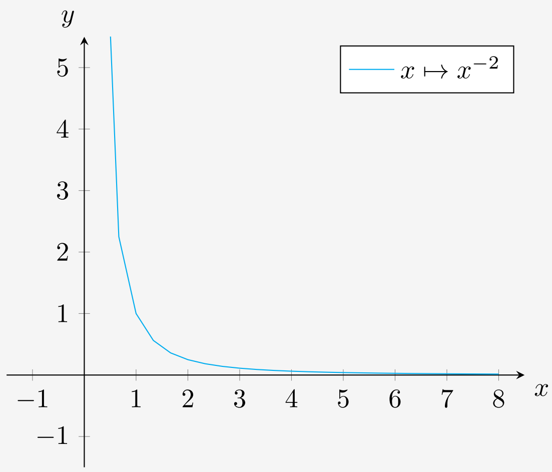
1. Cas $0 < \alpha < 1$:



2. Cas $1 < \alpha$



3. Cas $\alpha < 0$



Cas $\alpha < 0$: $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
Cas $\alpha > 0$: $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2.3 Etude de l'ensemble de définition d'une fonction quelconque

Il est important de savoir donner l'ensemble de définition d'une fonction.

Il faut surtout faire attention à trois points :

1. $\dfrac{*}{\Delta}$ existe si et seulement si $\Delta \neq 0$
2. $\ln(*)$ existe si et seulement si $* > 0$, car le logarithme est défini sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. $\sqrt{*}$ existe si et seulement si $* \geq 0$, car la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 2.4. • $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$.

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R},\ x+3 \neq 0\}.$$

Cherchons les valeurs interdites.
On a : $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.
D'où

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

• $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \geq 0\right\}.$$

On étudie alors le signe du trinôme du second degré $x^2 + x + 1$. Son discriminant vaut $\Delta = -3 < 0$.
D'où $x^2 + x + 1$ est toujours du signe de $a = 1$, c'est à dire positif.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$.
D'où

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

• $f : x \mapsto \ln(x + 4)$.

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R},\ x+4 > 0\}.$$

Or, $x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$.
D'où

$$\mathcal{D}_f =]-4; +\infty[.$$

Exercice 2.19. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes (attention à bien rédiger comme dans les exemples).

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{3x+2}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln\left(x^2 + 2x - 3\right)$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x-2)}$

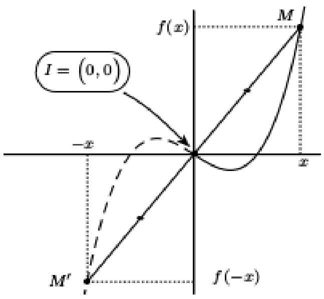
2.4 Propriétés des fonctions

2.4.1 Parité et symétrie

L'étude des propriétés d'une fonction permet de restreindre son ensemble d'étude et de compléter sa courbe par symétrie.

Définition 2.10

$f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est **impaire** si et seulement si :
pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ alors $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
La courbe d'une fonction impaire est donc **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

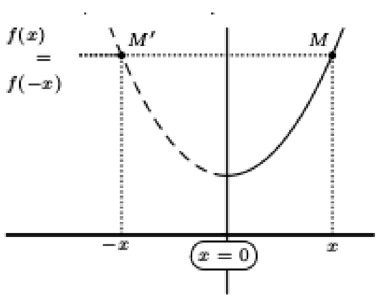


Exercice 2.20. Montrer que $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire

Exercice 2.21. ➼ Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est impaire.

Définition 2.11

$f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est **paire** si et seulement si :
pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ alors $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
La courbe d'une fonction paire est donc **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** (d'équation $x = 0$).



Exercice 2.22. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est paire.

Exercice 2.23. ➼ Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction paire.

Remarque 2.15

1. **Intérêt pratique d'une fonction paire ou impaire :** il suffit d'étudier la fonction f sur $[0, +\infty[\cap\mathcal{D}_f$ (car par symétrie, on peut en déduire l'étude sur $]-\infty, 0[\cap\mathcal{D}_f$).
2. Une fonction peut ne pas être paire ni être impaire.
   Par exemple, la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ n'est pas une fonction paire ou impaire car $\mathcal{D}_g =]-\infty, 2[\bigcup]2, +\infty[$ donc $-2 \in \mathcal{D}_g$ mais $2 \notin \mathcal{D}_g$.

2.4.2 Variation d'une fonction

Définition 2.12

Soit I un intervalle sur lequel f est définie ; on dit que

1. f est **croissante** sur I lorsque $\forall(x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
2. f est **décroissante** sur I lorsque $\forall(x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$
3. f est **strictement croissante** sur I lorsque $\forall(x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
4. f est **strictement décroissante** sur I lorsque $\forall(x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Une fonction est **monotone** sur un intervalle si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle.

Exemple 2.5. La fonction $x \to x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2.10 (Enchaînements d'inégalités)

Partant d'une inégalité de départ valable sur un certain intervalle, on peut appliquer une fonction dont on connait les variations sur cet intervalle afin de déduire une nouvelle inégalité.
Sauf cas évident, il faut toujours **justifier ces étapes** en précisant (si besoin en démontrant) les variations de la fonction sur l'intervalle en question.
En résumé : « **appliquer une fonction croissante ne change pas le sens de l'inégalité, appliquer une fonction décroissante change le sens de l'inégalité.** ».
Les cas à connaître parfaitement :

1. **ne change pas le sens de l'inégalité :** ajouter (ou soustraire) le même nombre, multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif, prendre le carré de deux nombres positifs, prendre la racine carrée de deux nombres positifs, appliquer la fonction exponentielle, appliquer la fonction logarithme à deux nombres positifs.
2. **change le sens de l'inégalité :** multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif, prendre le carré de deux nombres négatifs, prendre l'inverse de deux nombres non nuls de même signe.

Exercice 2.24.

Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(6-3x)^2}$. Encadrer $f(x)$ lorsque $x \in [0;1]$.

Exercice 2.25.

Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto e^{(1-x)^2}$. Encadrer $f(x)$ lorsque $x \in [2;4]$.

Proposition 2.20

1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.
3. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
4. La composée de deux fonctions décroissantes est croissante.
5. La composée d'une fonctions croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Démonstration. □

Remarque 2.16

1. Si de plus, l'une au moins des fonctions est strictement monotone, la somme l'est aussi.
2. La fonction $g \circ f$ n'est strictement monotone que si f et g le sont toutes les deux.
3. **Attention** le produit de deux fonctions croissantes n'est pas toujours une fonction croissante ! (ce n'est vrai que si les deux fonctions sont positives).
   Contrexemple : sur $[0,1]$, $f : x \to x$ et $g : x \to x-1$ sont strictement croissantes donc croissantes mais la fonction $h : x \to x(x-1)$ est strictement décroissante puis strictement croissante, admettant un minimum en $x = 1/2$ de valeur $1/4$.

Exemple 2.6. Montrer que h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^-$.
Méthode 1 : h est la composée de la fonction $f(x) = x^2+1$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ avec $f(\mathbb{R}^-) = [1,+\infty[$ et de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est décroissante sur $[1,+\infty[$.
Méthode 2 : soient $(x_1,x_2) \in (\mathbb{R}^-)^2$ tels que $x_1 \leqslant x_2$. Montrons que $h(x_1) \leqslant h(x_2)$.
$x_1 \leqslant x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 \geqslant x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1 \geqslant x_2^2+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x_2^2+1}$.
Méthode 3 : via le tableau de variations de la fonction h (cf. Section 2.5).

Remarque 2.17

La plupart du temps, on utilise toutefois l'outil de la dérivation, plus calculatoire, pour établir les variations d'une fonction, ce qui évite d'inventer de fausses règles et permet surtout de traiter des cas beaucoup plus compliqués.

2.5 Dérivation

2.5.1 Opérations et dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 2.13

- Le **taux de variation** de la fonction f entre a et x est le quotient : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- f est **dérivable** en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe et est finie :
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
- Si f est une fonction dérivable en a, on appelle **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisses $x = a$, la droite d'équation
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Définition 2.14

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé **fonction dérivée** de f sur I.

Le tableau suivant contient les dérivées de fonctions usuelles :

D_f	**Fonction** f	**Fonction** f'	**Ensemble de définition de** f'
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Remarque 2.18

1. A noter que l'on a toujours $D_{f'} \subset D_f$, car pour parler de la dérivée de f en un point il faut que la fonction existe en ce point.
2. A l'exception de la fonction racine carrée, les autres fonctions usuelles citées ci-dessus sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Exemple 2.7.

- ➔ $f(x) = \pi$ $\quad f'(x) = 0$
- ➔ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ $\quad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
- ➔ $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$
- ➔ $f(x) = x^{2007}$ $\quad f'(x) = 2007x^{2006}$

Proposition 2.21 (Opérations sur les dérivées)

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	**Fonction**	**Dérivée**
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un nombre	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Multiplication	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Division	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Puissance	u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
Inverse	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
racine	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
exponentielle	e^u	$u'\ e^u$
logarithme	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exercice 2.26. Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné leur ensemble de définition et préciser leur ensemble de dérivation :

1. $x \mapsto x^3 + x + 3$
2. $x \mapsto 3(x^2 + 4)$
3. $x \mapsto (-2x + 3)(5x - 3)$
4. $x \mapsto (2x - 7)^2$
5. $x \mapsto \dfrac{3x - 4}{x^2 + 3}$
6. $x \mapsto e^{2x+1}$ et donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 2 .
7. $x \mapsto \ln(-2x + 5)$
8. $x \mapsto 2x\sqrt{x}$.
9. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
10. $x \mapsto x^x$.

Exercice 2.27. ➬

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné leur ensemble de définition et préciser leur ensemble de dérivation :

1. $x \mapsto \dfrac{x+1}{3}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x} + \ln(x^2+1)$
3. $t \mapsto e^{-t^2}$
4. $x \mapsto x\ln(x)$.
5. $x \mapsto \sqrt{x+6}$.
6. $x \mapsto \ln(x^2 + \sqrt{x} + 1)$
7. $x \mapsto e^{\frac{2x+1}{x+2}}$
8. $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^3}$
10. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

2.5.2 Application de la dérivée aux variations

Théorème 2.3

Soit f une fonction définie et continue sur un **intervalle** I. Si

1. f' est nulle sur l'intervalle I, alors f est constante sur I.
2. $f' > 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement croissante sur I.
3. $f' < 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque 2.19

Les deux derniers points restent vrais si $f'(x) = 0$ pour un nombre fini de valeurs de x, comme par exemple la fonction cube.

Attention, il est nécessaire de considérer **un intervalle** pour appliquer le théorème précédent, sinon il peut être faux, comme par exemple pour la fonction inverse sur son ensemble de définition.

Méthode 2.11 (Montrer une inégalité ou étudier un signe *via* une étude de fonction)

Lorsque les manipulations algébriques directement sur les inégalités ne suffisent plus, une méthode très importante pour étudier un signe ou établir une inégalité est la suivante :

1. Dans le cas d'une inégalité du type $A(x) \geq B(x)$ à établir, se ramener par soustraction à $f(x) = A(x) - B(x) \geq 0$, c'est à dire à l'étude d'un signe.
2. Établir les variations de la fonction f (par dérivation par exemple).
3. Placer dans le tableau de variations toutes les valeurs pour lesquelles $f(x) = 0$.

Exercice 2.28. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

Exercice 2.29.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leq x - 1$.

2.6 Majorant, minorant, maximum et minimum

Soit f une fonction définie sur I.

Définition 2.15 (Majorant-minorant)

1. La fonction f est **majorée** (resp. **minorée**) sur I si :

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M \quad \text{(resp. } \exists\, m \in \mathbb{R}\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m).$$

   On dit alors que M (resp. m) majore (resp. minore) f sur I ou est un majorant (resp. minorant) de f sur I.

2. Une fonction à la fois majorée et minorée est dite **bornée** :

$$\exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall x \in I,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$

   ce qui revient à

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant k.$$

Remarques 2.20

1. Un majorant n'existe pas toujours.
   Exemple : la fonction f_1 : $x \to x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ n'admet pas de majorant.
2. Un majorant, quand il existe, n'est pas unique : en effet, si M majore f, alors tout réel supérieur à M majore aussi f
3. Idem pour les minorants.
   Exemple : la fonction f_1 précédente admet 0 comme minorant mais également tout nombre négatif.

Définition 2.16 (Maximum-Minimum)

Soit x_0 un élément de I.
On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) en x_0 sur I si

$$\forall x \in I, f(x) \leqslant f(x_0) \quad \text{resp.} \forall x \in I, f(x) \geqslant f(x_0).$$

On note $\underset{x\in I}{max} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\min\limits_{x\in I} f(x) = f(x_0)$.)
Un **extremum** désigne un maximum ou un minimum.

Remarque 2.21

Lorsque cette propriété, non réalisée sur I entier, l'est sur un intervalle ouvert contenant x_0, on dit que f admet un extremum (maximum ou minimum) local en x_0.

Méthode 2.12 (Etude du maximum/minimum)

L'étude du maximum ou du minimum d'une fonction passe généralement par l'étude de ses variations.

Exemple 2.8. Tout réel négatif est un minorant de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$, et tout réel supérieur à 1 en est un majorant.
En effet, $\forall\ x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$.
On notera que 1 en est le majorant le plus petit et la fonction admet cette valeur comme maximum :

$$\max_{x\in\mathbb{R}} g(x) = 1 = g(0).$$

En revanche, 0 est le minorant le plus grand, *mais* la fonction n'admet pas de minimum, car 0 n'est jamais atteint par la fonction.

Exercice 2.30.
1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$ admet un maximum et un minimum sur $[-1, 1]$ que l'on déterminera.
2. En déduire que f est bornée sur $[-1, 1]$.
3. Même question en remplaçant $[-1, 1]$ par $[-2, 2]$.

Exercice 2.31. ➭ Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{2+x}$ admet un maximum et un minimum sur $[0, 2]$ que l'on déterminera.

En déduire que f est bornée sur $[0, 2]$.

2.7 Bilan : plan d'étude sommaire d'une fonction

Pour étudier une fonction dérivable :

1. **Ensemble de définition** $\mathcal{D}_f$: on le recherche s'il n'est pas donné dans l'énoncé.
   (a) on trouve les valeurs interdites venant des quotients en résolvant : « dénominateur $= 0$ »
   (b) les compositions $\ln(u)$, $\sqrt{u}$ sont définies sur l'ensemble des solutions de $u(x) > 0$, $u(x) \geq 0$.
2. **Parité** (si demandé) : on recherche la parité : on vérifie d'abord que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et on étudie la parité. (qui permet de restreindre l'ensemble d'étude aux réels positifs de $\mathcal{D}_f$).
3. **Variations** : on étudie l'ensemble de dérivabilité puis la dérivée pour obtenir les variations et les extrema (qui correspondent à des tangentes horizontales). Si le signe de la dérivée est compliqué à obtenir, on peut envisager d'étudier les variations de la dérivée afin d'obtenir son signe.
4. **Courbe** : on trace éventuellement certaines tangentes et on représente la courbe de manière cohérente avec l'étude.

Par la suite, nous ajouterons d'autres éléments qui rendent l'étude plus précise (tangentes particulières, convexité, point d'inflexion, asymptotes, etc...).