Chapitre 19

Théorie des graphes

Nous allons dans ce chapitre aborder la théorie des graphes. Un graphe fini est un outil simple et efficace de modélisation. Les graphes sont notamment utilisés en sciences sociales pour la modélisation des réseaux sociaux et en économie pour des modèles d'évolution. Nous verrons qu'un graphe peut être représenté par sa matrice d'adjacence et que le calcul matriciel en permet une analyse qui peut s'interpréter concrètement.

A la fin de ce chapitre, il vous faudra :

- Connaître le vocabulaire autour des graphes (sommets, arêtes, boucle, ordre, degré, chaîne, cycle, etc).
- Connaître la formule d'Euler.
- Connaître la définition d'un graphe eulérien et d'un graphe connexe.
- Savoir donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe connexe soit eulérien.
- Connaître la définition de la matrice d'adjacence d'un graphe.
- Savoir interpréter les puissances nème de la matrice d'adjacence en termes de chemin reliant deux sommets.
- Savoir donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les puissances de la matrice d'adjacence pour qu'un graphe soit connexe.

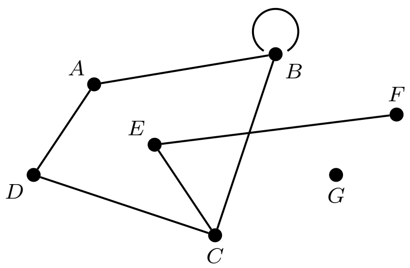
19.1 Généralités sur les graphes

19.1.1 Définition

Définition 19.1 (Graphes, sommets et arêtes)

1. Un **graphe** est un ensemble de points et de segments reliant certains de ces points.
2. Un **sommet** est un point d'un graphe.
3. Une **arête** est une segment reliant deux sommets.
4. Deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.
5. Un sommet est dit **isolé** si aucune arête ne le relie à un autre sommet.
6. Une arête reliant un sommet à lui-même est appelé **boucle**.
7. Un graphe est **simple** si le graphe est sans boucle et s'il y a au plus une arête entre deux sommets.

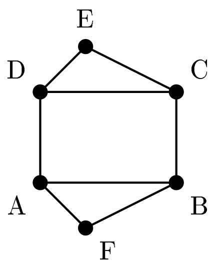
Exemple 19.1. Voici un exemple de graphe à 7 sommets avec une boucle et 7 arêtes :



On peut noter par exemple que :

- Le sommet A est adjacent à D et B.
- Le sommet G est isolé.
- Le sommet B est adjacent à A C et à lui-même.
- Les sommets B et F ne sont pas adjacents.

Exemple 19.2. Voici un exemple de graphe simple à 6 sommets et 8 arêtes :



Définition 19.2 (Ordre et degré d'un graphe)

1. **L'ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.
2. Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. *Attention, dans le cas d'une boucle, une arête est comptée deux fois.*

Exemple 19.3. Reprenons l'exemple 19.1.
Le graphe est d'ordre 7 et on a le tableau suivant

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	3	2	2	1	0

Exemple 19.4. Reprenons l'exemple 19.2.
Le graphe est d'ordre 6 et on a le tableau suivant

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degrés	3	3	3	3	2	2

19.1.2 Formule d'Euler

Proposition 19.1 (Formule d'Euler (ou formule des poignées de main)

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes.
En particulier, la somme des degrés est donc un nombre pair !

Remarque 19.1

On peut reformuler ce théorème de la manière suivante :
Soit (n, p) deux entiers naturels non nuls.
Soit G un graphe constitué de n sommets notés $A_1, ..., A_n$ de degré respectif $d_1, ..., d_n$ et de p arêtes.
Alors on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i = 2p$.

Exemple 19.5. Dans l'exemple 19.1, il y a $2 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 14$ qui est bien le double du nombre d'arêtes (il y en a 7).

Exemple 19.6. Réseau téléphonique

Dans une « toute petite ville », il y a 15 appareils téléphoniques. Est-il possible de les relier par des fils téléphoniques pour que chaque appareil soit relié avec exactement 5 autres ?
Solution :
On construit un graphe, ou du moins on imagine un graphe correspondant au problème : les sommets sont les appareils et les arêtes sont les fils ; les sommets ont tous un degré impair et il y en a un nombre impair donc la somme de tous les degrés est impaire : c'est impossible.

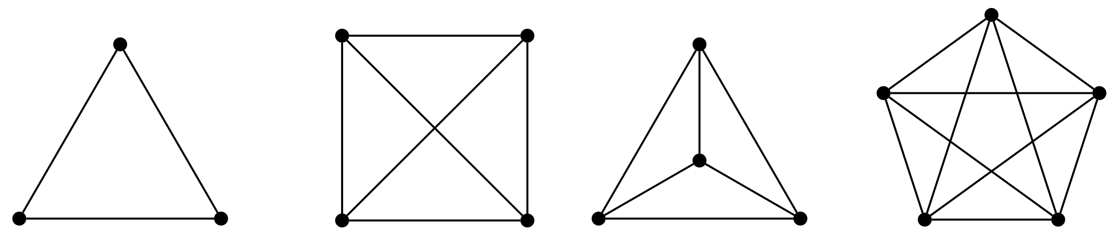
19.2 Quelques graphes particuliers

19.2.1 Graphe complet

Définition 19.3 (Graphe complet)

Un graphe est dit **complet** si chaque sommet est adjacent à tous les autres.

Exemple 19.7. Voici des exemples de graphes complets K_n simples d'ordre $3, 4$ et 5.



K_3 Deux représentations du K_4 K_5

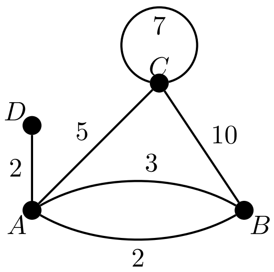
19.2.2 Graphe pondéré

Définition 19.4 (Graphe pondéré)

Un graphe est dit **pondéré** un graphe dans lequel chaque arête est pondérée par un réel positif.

Exemple 19.8.

Voici un exemple de graphe pondéré.

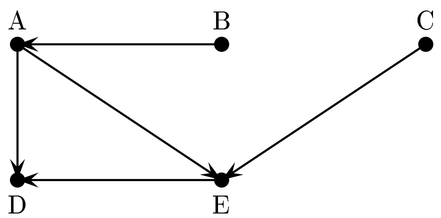


19.2.3 Graphe orienté

Définition 19.5 (Graphe orienté)

On appelle graphe orienté un graphe dont les arêtes sont orientées, c'est à dire dirigées d'un sommet à l'autre à l'aide d'une flèche.

Exemple 19.9. Voici un exemple de graphe orienté :



Attention la formule d'Euler ne s'applique pas aux graphes orientés.

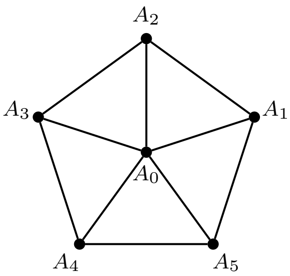
19.3 Graphe eulérien et graphe connexe

19.3.1 Graphe eulérien

Définition 19.6 (Chaîne et cycle)

1. On appelle **chaîne** toute liste de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont reliés par une arête.
2. La chaîne est dite **orientée** si les arêtes reliant les sommets successifs de la chaîne sont orientées (on parle alors plutôt de chemin).
3. La chaîne est dite **fermée** lorsque le sommet initial coïncide avec le sommet final.
4. Un **cycle** dans un graphe est une chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes.

Exemple 19.10. Considérons le graphe ci-dessous :



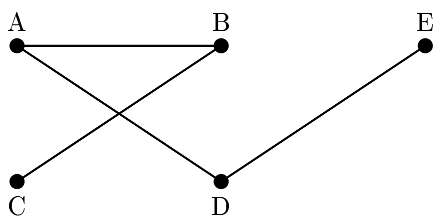
Dans le graphe ci-dessus :

- La chaîne $\{A_0 ; A_1 ; A_0 ; A_2 ; A_0 ; A_3 ; A_0 ; A_4 ; A_0 ; A_5 ; A_0\}$ est une chaîne fermée de longueur 10, mais pas un cycle car par exemple on passe deux fois par l'arête qui relie A_0 à A_1.
- La chaîne $\{A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_0 ; A_4 ; A_5\}$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.
- La chaîne $\{A_1 ; A_2 ; A_0 ; A_3 ; A_4 ; A_0 ; A_5 ; A_1\}$ est un cycle de longueur 7.

Définition 19.7 (Chaîne et cycle eulérien)

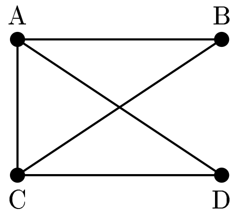
1. Une **chaîne eulérienne** est une chaîne contenant **toutes** les arêtes du graphe, chacune étant parcourue **une seule fois**.
2. Un **cycle eulérien** désigne une chaîne eulérienne fermée.
3. Un **graphe est dit eulérien** s'il contient au moins un cycle eulérien.

Exemple 19.11. Considérons le graphe suivant :



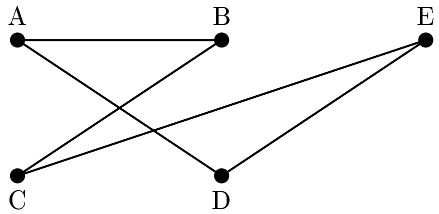
La chaîne $\{E, D, A, B, C\}$ est une chaîne eulérienne.

Exemple 19.12. Considérons le graphe suivant :



Attention la chaîne $\{A, B, C, D, A\}$ n'est pas un cycle eulérien. En effet, elle passe par tous les sommets mais pas par toutes les arêtes (notamment elle ne passe pas par l'arête qui relie A à C).

Exemple 19.13. Considérons le graphe suivant :



La chaîne $\{E, D, A, B, C, E\}$ est un cycle eulérien et le graphe est donc eulérien.

19.3.2 Graphe connexe

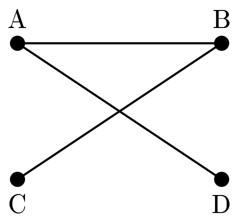
Définition 19.8 (Graphe connexe)

On dit qu'un graphe est **connexe** si chaque sommet de ce graphe peut être relié par au moins une chaîne à n'importe quel autre sommet.

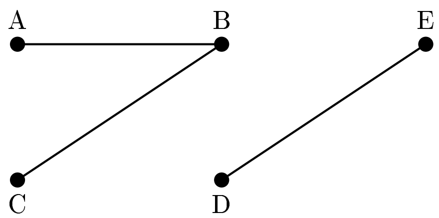
A noter qu'un graphe complet est nécessairement connexe.

Un graphe non connexe ne peut jamais être tracé sans lever le stylo.

Exemple 19.14. Voici un graphe connexe :



Et un graphe non connexe :



Proposition 19.2

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. G possède zéro ou deux sommets A et B de degré impair.
2. G admet une chaîne eulérienne (d'extrémités A et B dans le second cas).

Remarque : un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si on peut le tracer "sans lever le crayon".

Exemple 19.15. Dans le graphe de l'exemple 19.11, les sommets E et C sont les seuls avec un degré impair, cela confirme la chaîne eulérienne $\{E, D, A, B, C\}$ que l'on avait trouvé.

Théorème 19.1

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Tous les sommets de G sont de degré pair
2. G admet un cycle eulérien.

Exemple 19.16. Dans le graphe de l'exemple 19.12, tous les sommets ne sont pas de degré pair (A et C sont de degré impair). Par contre, dans l'exemple 19.13, tous les sommets sont de degré pair, ce qui confirme l'existence d'un cycle eulérien.

19.4 Matrices d'adjacence

19.4.1 Longueur d'une chaîne

Définition 19.9 (Longueur d'une chaîne)

La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes constituant la chaîne. (Cela n'a rien à voir avec une longueur réelle !).

19.4.2 Matrice d'adjacence

Définition 19.10 (Matrice d'adjacence)

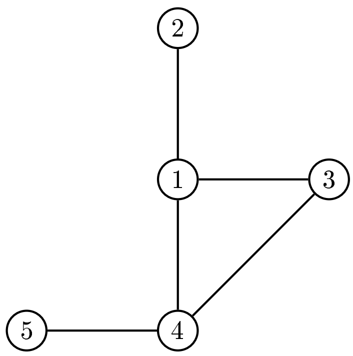
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit G un graphe non orienté ayant n sommets numérotés de 1 à n.
On appelle matrice d'adjacence du graphe G la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \ m_{ij} = \text{nombre de chaîne de longueur 1 reliant le sommet } i \text{ au sommet } j.$$

Remarque 19.2

Si le graphe est orienté, le résultat ci dessus reste vrai en remplaçant "nombre de chaînes de longueur 1 reliant le sommet i au sommet j", par "nombre de chemin de longueur 1 partant du sommet i et allant au sommet j".

Exemple 19.17. On considère le graphe suivant :



La matrice associée à ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 19.3

Dans le cas d'un graphe non orienté, une arête reliant deux sommets i et j intervient deux fois dans la matrice : en ligne i et colonne j et en ligne j et colonne i.

Proposition 19.3

La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est symétrique.

19.4.3 Nombre de chaînes reliant deux sommets

Proposition 19.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit G un graphe non orienté ayant n sommets numérotés de 1 à n et M sa matrice d'adjacence.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$M_{ij}^k = \text{nombre de chaîne de longueur } k \text{ reliant le sommet } i \text{ au sommet } j.$$

Remarque 19.4

Le résultat précédent reste vrai pour un graphe orienté (mais n'est pas au programme) en remplaçant " nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j" par "nombre de chaînes orientées (chemin) de longueur k partant de i pour aller à j".

Exemple 19.18. Reprenons l'exemple 19.17.
Alors $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit par exemple que :

- Il n'existe pas de chaîne de longueur 2 reliant le sommet 1 à 2.

- Il existe trois chaînes de longueur 2 reliant le sommet 1 à lui même : $\{1, 3, 1\}$, $\{1, 2, 1\}$ et $\{1, 4, 1\}$.
- Il existe une seule chaîne de longueur 2 reliant le sommet 2 au sommet 3 : $\{2, 3, 1\}$.

19.4.4 Condition nécessaire et suffisante de connexité

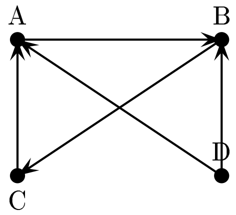
Théorème 19.2

Soit G est un graphe orienté ayant n sommets de matrice d'adjacence M.
Alors G est connexe si et seulement si la matrice $I_n + M + \cdots + M^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Remarque 19.5

Notons $B = I_n + M + \cdots + M^{n-1}$.
Alors B_{ij} représentent le nombre de chaînes de longueur 1 ou 2 ou ... ou $n - 1$ reliant le sommet i au sommet j.

Exemple 19.19. Considérons le graphe suivant :



Alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_4 + M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le graphe associé n'est donc pas connexe, puisque la matrice ci-dessus possède des coefficients nuls. Par exemple, il n'existe pas de chaîne orientée permettant de relier le sommet A au sommet D.

Remarque 19.6

Le résultat précédent reste valable si le graphe est non orienté, mais n'est pas au programme.