# Méthode

Fonction valeur absolue et partie entière

## 1. (In)équation avec valeur absolue

Si l'équation peut s'écrire sous la forme $\mid X \mid = a$ (avecc $a \geq 0$, sinon il n'y a pas de solutions) ou $\mid X \mid = \mid Y \mid$, on utilise le fait que :

1. $\mid X \mid = a \Leftrightarrow X = -a \quad ou \quad X = -a$
2. $\mid X \mid = \mid Y \mid \Leftrightarrow X = -Y \quad ou \quad X = Y$.

**Exercice 1.1**

Résoudre :

1. $\mid x + 5 \mid = 6$.
2. $\mid x + 1 \mid = \mid x - 1 \mid$.

*Solution.*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rl} & |x+5| = 6 \\ \Leftrightarrow & x+5 = 6 \text{ ou } x+5 = -6 \\ \Leftrightarrow & x = 1 \text{ ou } x = -11 \end{array}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rl} & |x+1| = |x-1| \\ \Leftrightarrow & x+1 = -(x-1) \text{ ou } x+1 = x-1 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \text{ ou } 1 = -1 \ (impossible) \end{array}$$

□

Dans les autres cas, on se ramène à des (in)équations classiques en se débarassant de la valeur absolue.

**Exercice 1.2**

Résoudre $\mid 5x + 7 \mid = \mid 2x + 1 \mid +1$.

*Solution.*

1. **Ecrivons $\mid 5x + 7 \mid$ et $\mid 2x + 1 \mid$ sans valeur absolue.**

   On a :
   $5x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-7}{5}$.
   et
   $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-1}{2}$.
   On en déduit alors le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $-7/5$ | | $-1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert 5x+7 \rvert$ | $-(5x+7) =$ $-5x-7$ | $\vert$ | $5x+7$ | $\vert$ | $5x+7$ | |
| $\lvert 2x+1 \rvert$ | $-(2x+1) =$ $-2x-1$ | $\vert$ | $-(2x+1) =$ $-2x-1$ | $\vert$ | $2x+1$ | |
| $\lvert 5x+7 \rvert$ $=$ $\lvert 2x+1 \rvert +1$ | $-5x-7$ $=$ $(-2x-1)+1$ | $\vert$ | $5x+7$ $=$ $(-2x-1)+1$ | $\vert$ | $5x+7$ $=$ $(2x+1)+1$ | |

2. **On doit maintenant résoudre trois équations.**
   (a) **1er cas :**
   On résout sur $]-\infty;-7/5]$ l'équation $-5x-7=-2x$.
   On a :
   $-5x-7=-2x$
   $\Leftrightarrow -3x=7$
   $\Leftrightarrow x=-7/3$.
   Or $-7/3<-7/5$.
   D'où $S=\{-7/3\}$ **Pensez à vérifier que vos solutions sont bien dans l'ensemble sur lequel vous résolvez votre équation.**

   (b) **2ème cas :**
   On résout sur $[-7/5;-1/2]$ l'équation $5x+7=-2x$.
   On a :
   $5x+7=-2x$
   $\Leftrightarrow 7x=-7$
   $\Leftrightarrow x=-1$.
   Or $1\in[-7/5;-1/2]$ .
   D'où $S=\{1\}$.

   (c) **3ème cas :**
   On résout sur $[-1/2;+\infty[$ l'équation $5x+7=2x+2$.
   On a :
   $5x+7=2x+2$
   $\Leftrightarrow 3x=-5$
   $\Leftrightarrow x=-5/3$.
   Or $-5/3\in[-1/2;+\infty[$ .
   D'où $S=\{-5/3\}$.

   (d) Au final, l'ensemble des solutions est donc égal à

$$S=\{-1;-7/3;-5/3\}$$

**Remarque :** penser à vérifier vos résultats afin d'être sûr de ne pas avoir fait d'erreurs de calcul.
□

Le principe reste le même pour les inéquations avec valeurs absolues.

## 2. Partie entière

On retiendra que pour tout réel $x$ :

- $\lfloor x \rfloor$ est l'entier relatif le plus grand qui est inférieur ou égal à $x$.
- $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

- si $m$ est un entier qui vérifie $m \leq x$ alors on peut en déduire que $m \leq \lfloor x \rfloor$ (car $\lfloor x \rfloor$est le plus grand entier inférieur à $x$).

On retiendra que

$$\boxed{\lfloor x \rfloor = * \Leftrightarrow * \leq \lfloor x \rfloor < * + 1}.$$

Ainsi, pour montrer que $\lfloor x \rfloor = *$, on montrera que $*$ vérifie la relation $* \leq \lfloor x \rfloor < * + 1$.

Par ailleurs, on retiendra que :

1. Les opérations que l'on aimerait faire, du style $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, sont fausses et qu'il faut toujours revenir à la définition pour montrer des résultats faisant intervenir la partie entière
2. Pour montrer que des égalités faisant intervenir la partie entière ($a = b$), on peut montrer deux inégalités ($a \leq b$ et $b \leq a$).