

Du lundi 25 au 29 mars 2024.

## Colle de la semaine n°24

## Dérivabilité

## 1. QUESTIONS DE COURS

- Dérivabilité en un point, à droite et à gauche :** Définition 20.1+ Définition 20.2+ Théorème 20.34+ Application 1 : étudier la dérivabilité de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{3x-1}$   
+ Application 2 : étudier la dérivabilité de la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
- Tangente :** Proposition 20.102+20.103+20.104
- Extremum :** Proposition 20.114+20.115
- Inégalités des accroissements finis :** Proposition 20.116
- Application 3 :**  
On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de premier terme  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ , où  $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ .  
(a) Etudier les points fixe de  $f$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .  
(c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est bien défini et positif.  
(d) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 2|$ .  
(e) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
- Dérivées successives :** Définition 20.5 + 20.6+20.7+20.8 + Proposition 20.117+ Théorème 20.36
- Convexité, concavité, point d'inflexion :** Théorème 20.37 + Proposition 20.119 + Définition 20.10+ Théorème 20.38+ Application : Montrer, en utilisant la convexité, que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $x \leq e^x - 1 \leq x(e-1)$ .

*Sans oublier Python !*

## 2. THÈME DE LA COLLE : DÉRIVABILITÉ

- Dérivabilité en un point :** définition, dérivabilité à droite et à gauche, tangente au graphe en un point.
- Dérivabilité sur un intervalle :** fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée, dérivée des fonctions usuelles opérations sur les dérivées (linéarité, produit, quotient), dérivée des fonctions composées, inégalités des accroissements finis et application à l'étude de suite, caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée, extremum local d'une fonction dérivable.
- Dérivées successives :** fonctions de classe  $C^1$ ,  $C^2$  et  $C^\infty$ , opérations algébrique.
- Convexité :** définition d'une fonction convexe, fonctions concaves, points d'inflexion, caractérisation des fonctions convexes de classe  $C^2$ .